

# Comportement asymptotique en temps de la solution entropique d'une loi de conservation scalaire avec des conditions aux limites

**Sébastien MARTIN**, INSA Lyon / Institut Camille Jordan

**Julien VOVELLE**, ENS Cachan, antenne de Bretagne / IRMAR

Ce travail [2] a été initialement motivé par l'étude de modèles simplifiés en théorie de la lubrification (modèles multi-fluides) ou d'ingénierie pétrolière (écoulements diphasiques en milieux poreux avec termes de gravité). Le comportement asymptotique en temps de la solution d'une loi de conservation scalaire dans le cas de domaines non bornés a fait l'objet de nombreuses études. Mais lorsque le domaine est borné, la prise en compte de conditions aux limites devient prépondérante. Par ailleurs, peu de travaux se sont intéressés à cette spécificité : mentionnons ceux de Mascia et Terracina [3] qui ont étudié ce problème avec un terme source mais pour un flux autonome. Ici, nous considérons des lois de conservation scalaires sans terme source, mais prenant en compte le caractère non-autonome du flux. On considère donc le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (A(x, u)) = 0, & \text{sur } (0, 1) \times (0, +\infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0, & \text{sur } (0, 1), \\ u = \bar{u}, & \text{sur } \partial(0, 1) \times (0, +\infty) \end{cases}$$

Le flux  $A \in \mathcal{C}^1([0, 1]^2)$  satisfait les propriétés :

- (i)  $\forall x \in [0, 1], A(x, \cdot) = A(1 - x, \cdot), A(x, 0) = 0, A(x, 1) = Q \geq 0,$
- (ii)  $\forall u \in [0, 1], \partial_x A(\cdot, u) \leq 0$  sur  $[0, 1/2]$ .
- (iii)  $\forall x \in [0, 1], \exists \alpha(x) \in (0, 1), \begin{cases} \partial_u A(x, \cdot) > 0 \text{ sur } [0, \alpha(x)], \\ \partial_u A(x, \cdot) < 0 \text{ sur } (\alpha(x), 1], \end{cases}$

Un cas modèle, issu de la lubrification, est donné par  $A(x, u) = Q f(u) + h(x) u (1 - f(u))$ , avec  $f(u) = u$ , où  $u$  est la saturation du fluide de référence (lubrifiant liquide dans un palier infiniment long),  $Q$  le débit imposé,  $h$  la hauteur normalisée entre les surfaces délimitant la structure du palier. L'exposé est organisé de la façon suivante :

- dans un premier temps, nous montrons la convergence de la solution vers un état stationnaire qui dépend de la condition au bord (au sens de Bardos, Le Roux et Nédélec) et de la solution initiale. Plusieurs modes de convergence apparaissent en fonction de la donnée au bord et de données structurelles du flux. En adaptant une méthode de Freistühler et Serre [1], on montre l'existence conditionnelle d'un choc entropique stationnaire dont on caractérise la position.
- dans un deuxième temps, nous mettons en oeuvre une méthode V.F., avec prise en compte de conditions aux limites non-standard, afin d'illustrer numériquement la présence de discontinuités correspondant à des chocs entropiques stationnaires. Ces résultats sont appliqués à la modélisation de la cavitation (i.e. lubrification partielle dans certains mécanismes), les chocs entropiques stationnaires correspondant à la rupture du film lubrifié.

## Références

- [1] H. FREISTÜHLER, D. SERRE, *The  $L^1$ -stability of boundary layers for scalar viscous conservation laws*, J. Dynam. Differential Equations, 13 (4), 745–755, 2001.
- [2] S. MARTIN, J. VOVELLE, *Large-time behavior of the entropy solution of a scalar conservation law with boundary conditions*, submitted paper, <http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00012070>, 2005.
- [3] C. MASCIA, A. TERRACINA, *Large-time behavior for conservation laws with source in a bounded domain*, J. Differential Equations, 159 (2), 485–514, 1999.

Sébastien MARTIN – [sebastien.martin@insa-lyon.fr](mailto:sebastien.martin@insa-lyon.fr)

INSA Lyon / Institut Camille Jordan CNRS UMR 5208, 21 av. Jean Capelle, 69621 Villeurbanne cedex, France

Julien VOVELLE – [julien.vovelle@bretagne.ens-cachan.fr](mailto:julien.vovelle@bretagne.ens-cachan.fr)

ENS Cachan Antenne de Bretagne / IRMAR, CNRS UMR 6625, Avenue Robert Schuman, Campus de Ker Lann, F-35170 Bruz, France