Lois de conservation hyperboliques sur une variété : estimations de la variation totale et convergence de la méthode des volumes finis

Paulo AMORIM, Laboratoire Jaques-Louis Lions, Paris
Matania BEN ARTZI, Institute of Mathematics, Hebrew University, Jerusalem
Philippe G. LEFLOCH, Laboratoire Jaques-Louis Lions, Paris

Mots-clés : Loi de conservation hyperbolique, variété Riemannienne, solution d'entropie, variation totale, méthode des volumes finis.

On montre la convergence de la méthode des volumes finis pour la loi de conservation scalaire hyperbolique sur une variété Riemannienne, ainsi que des estimations sur la variation totale des solutions.
Le problème de Cauchy pour la loi de conservation hyperbolique sur une variété Riemannienne (M, g) s'écrit

$$\partial_t u + \nabla_g \cdot f(u, x) = 0, \qquad u = u(t, x) \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \, x \in M, \tag{1}$$

où ∇_g représente l'opérateur de divergence sur M associé à la métrique g et la fonction flux f est un champ de vecteurs régulier donné.
Étant donnée une triangulation d'éléments K et d'arêtes e, la méthode des volumes finis s'écrit

$$u_K^{n+1} := u_K^n - \sum_{e \in \partial K} \frac{\tau |e|}{|K|} f_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n), \tag{2}$$

avec $f_{e,K}(u, v)$ une famille de fonctions flux numériques consistantes, monotones et conservatives.
On obtient la convergence forte des solutions approchées données par (2) vers l'unique solution d'entropie du problème (1). Pour la preuve, on utilise les mesures de Young et les solutions à valeurs mesure des lois de conservation. On montre des inégalités d'entropie discrètes sur la suite u^h qui nous permettent d'établir les estimations nécéssaires sur la mesure de Young associée. Il s'agit d'une généralisation au cas d'une variété Riemannienne du travail de Cockburn, Coquel et LeFloch [2] dans le cas Euclidien.
Ensuite, on s'intéresse au problème suivant: étant donné un champ de vecteurs X sur M, comment peut-on estimer la variation totale des solutions de (1) le long de la direction X? On prouve que la derivée de la solution u dans la direction de X satisfait une équation linéaire, d'où on déduit des estimations sur la variation totale de u dans cette direction. Par conséquent de ces estimations, on obtient d'une part que, sans aucune hypothèse sur le flux f, la variation totale reste bornée pour tout temps $T > 0$, et d'autre part que, si f est à divergence nulle, et si le crochet de Lie de f et X est nul pour tout $\overline{u} \in \mathbb{R}$,

$$\big[f(\overline{u}, \cdot), X\big] = 0, \qquad \overline{u} \in \mathbb{R},$$

alors on a la décroissance de la variation totale de u dans la direction de X, ce qui répond à la question posée. En traitant le cas particulier de la sphère, on trouve qu'il existe une fonction scalaire C tel que $X(C) = 0$ et

$$\mathcal{L}_X f = 0 \iff f(u, x) = C(u, x) X(x),$$

c'est-à-dire, f et X doivent être parallèles pour tout u pour que la variation totale de u décroît: Cela réduit largement l'ensemble des directions X selon lesquelles on a cette décroissance.

Références

[1] P. Amorim, M. Ben Artzi, P. G. LeFloch, *Hyperbolic conservation laws on manifolds: total variation estimates and the finte volume method*, 2005, à paraître dans Methods and Applications of Analysis.

[2] Cockburn B., Coquel F., and LeFloch P.G., *Convergence of finite volume methods for multidimensional conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal. **32** (1995), 687–705.

Paulo AMORIM – amorim@ann.jussieu.fr
Laboratoire Jaques-Louis Lions, 175 Rue du Chevaleret, 75013 Paris France
Matania BEN ARTZI – mbartzi@math.huji.ac.il
Institute of Mathematics, Hebrew University, Jerusalem 91904, Israel
Philippe G. LEFLOCH – lefloch@ann.jussieu.fr
Laboratoire Jaques-Louis Lions, 175 Rue du Chevaleret, 75013 Paris France