Estimation d'une source de pollution

Nathalie VERDIÈRE, Université de Technologie de Compiègne

Dans cette communication, nous allons chercher à estimer la position et le débit d'une source de pollution dans une rivière. Le modèle mathématique le plus simple d'un tel problème est donné par l'équation parabolique à une dimension suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + V\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) + Ru(t,x) = \lambda(t)\delta_a\,, \quad (x,t) \in]0,L[\times]0,T[\\ u(0,x) = 0,\ x \in]0,L[\,,\quad u(t,0) = 0,\ t \in]0,T[\,,\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0,\ t \in]0,T[\,, \end{array} \right. \tag{1}$$

où u, D, V, et R sont respectivement la concentration de polluant, le coefficient de dispersion, la vitesse de transport et le coefficient de réaction. Le membre de droite est le produit de la fonction débit λ avec la masse de Dirac de support la position de la source de pollution a. Comme le but de cette étude est l'estimation numérique de a et de la fonction débit λ, une discrétisation en espace est effectuée (différences finies centrées) et la masse de Dirac est approchée par $\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$. Ceci conduit à un système d'équations différentielles qui est récrit et complété pour obtenir un système (Sd_N) de polynômes différentiels. L'identifiabilité en $(\lambda(t), a)$ pour tout $t \in]0,T[$ du système (Sd_N) est tout d'abord étudiée. De cette étude, nous en avons déduit une méthode numérique pour estimer les paramètres. Tout d'abord, les conditions initiales permettent d'obtenir une expression de a en fonction de ce qui est connu. Ainsi, a est identifiable et peut-être calculé explicitement. Puis, après avoir choisi un ordre d'élimination, nous démontrons explicitement la forme du polynôme obtenu dans la présentation caractéristique du radical de l'idéal généré par le système (Sd_N), ceci quel que soit le nombre de point de discrétisation en espace. Ce polynôme est une équation différentielle linéaire d'ordre $N-1$ dont la solution est la fonction débit λ. L'utilisation de l'algorithme de Rosenfeld-Groebner a permis d'obtenir ses conditions initiales, d'où l'identifiabilté de λ et une méthode numérique pour l'estimer. Des dérivées d'ordre très élevé interviennent dans les calculs. Pour les évaluer, nous utilisons la méthode de dérivation proposée par M. Fliess et H. Sira-Ramirez [1] qui a l'avantage de donner des formules explicites des dérivées.

Références

[1] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier, H. Sira-Ramirez, *Une autre vision de l'identification de signaux et systèmes*, Actes CIFA, Douz, Tunisie, 2004.

[2] Verdière Nathalie, *Identifiabilité de systèmes d'équations aux dérivées partielles semi-discrétisées et applications à l'identifiabilité paramétrique de modèles en pharmacocinétique ou en pollution*, thèse, 2005.

Nathalie VERDIÈRE – nverdier@hds.utc.fr
Université de Technologie de Compiègne, BP 20 529, 60205 Compiègne, France