

Un problème d'Oseen extérieur en dimension deux

Hamid BOUZIT, Université de Pau et des Pays de l'Adour

Chérif AMROUCHE, Université de Pau et des Pays de l'Adour

Mots-clés : Équations d'Oseen, Espaces de Sobolev à poids, poids anisotropiques. Une linéarisation autour de la vitesse à l'infini du système de Navier-Stokes conduit aux équations d'Oseen [3]:

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + k\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla\pi = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = g \quad \text{dans } \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_* \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3)$$

où Ω est un domaine extérieur de \mathbb{R}^2 , avec une condition sur \mathbf{u} à l'infini:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_\infty.$$

A cause de la nature géométrique du domaine et de l'anisotropie du modèle, le cadre fonctionnel adéquat est celui des espaces de Sobolev avec des poids. Afin d'étudier le système (1) – (3), on commence par se placer dans le cas du plan entier \mathbb{R}^2 . Prenant la divergence de (1), le système se découple en deux équations

$$\Delta\pi = \operatorname{div}\mathbf{f} + \nu\Delta g - k\frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad (4)$$

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + k\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} = \mathbf{f} - \nabla\pi \quad \text{dans } \mathbb{R}^2. \quad (5)$$

On est donc amené à l'étude du problème d'Oseen scalaire:

$$-\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad (6)$$

où ($\nu = k = 1$), dont la solution fondamentale se comporte à l'infini:

$$\mathcal{O}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi r}} e^{-\frac{1}{2}(|\mathbf{x}|-x_1)} \left[1 - \frac{1}{4r} + O(r^{-2}) \right].$$

On va donc, dans notre étude, choisir des poids de la forme $(1 + |\mathbf{x}|)^\alpha (1 + |\mathbf{x}| - x_1)^\beta$. On donne, grâce en particulier aux propriétés du potentiel d'Oseen $\mathcal{O} * f$, des résultats d'existence et d'unicité en théorie L^p , $1 < p < \infty$. La résolution du problème d'Oseen dans le cas \mathbb{R}^2 permet ensuite d'étudier le problème extérieur qui est plus compliqué à la fois à cause du terme de bord et de la condition de compatibilité qui apparaissent en fonction des données et de l'exposant p . Le cas de la dimension 3, un peu moins compliqué, a été étudié par Finn (1965), Galdi (1990), Farwig (1990) et plus récemment par [1].

Références

- [1] C. AMROUCHE AND U. RAZAFISON, On the Oseen problem in three-dimensional exterior domains, *Analysis and Applications*, **Vol. 4 - 2**, p. 133-162, (2006)
- [2] R. FINN, On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problems, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **19**, p. 363-406, (1965).
- [3] C. W. OSEEN, Über die Stokesesche Formel und Über eine Verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik, *Journal Ark. Mat. Astron. Fys.*, **29-6**, p. 1-20, (1910).

Hamid BOUZIT – hamidbouzit@yahoo.fr

Université de Pau et des Pays de l'Adour, UMR-CNRS 5142, Avenue de l'université 64000 Pau et Université de Mostaganem, Algérie

Chérif AMROUCHE – cherif.amrouc@univ-pau.fr

Laboratoire de Mathématiques Appliquées, CNRS UMR 5142, Université de Pau et des Pays de l'Adour, Avenue de l'université 64000 Pau