Schémas volumes finis pour l'équation de level set en maillage non structuré

Malcom DJENNO NGOMANDA, Université blaise pascal

Mots-clés : équation de level set, solution de viscosité, maillage non structuré, schémas volumes finis.

Soit $T > 0$. Etant donnés Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $F : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$,
l'équation level set (voir [4]) s'écrit:

$$\text{Trouver } \Phi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R} \text{ tel que}$$
$$\partial_t \Phi(\boldsymbol{x},t) + F(\boldsymbol{x},t)\,|\nabla\Phi(\boldsymbol{x},t)| = 0,$$

que l'on completera avec une condition initiale au temps $t = 0$. En outre, si Ω est différent de $\mathbb{R}^2$, il faut aussi rajouter des conditions de type Neumann ou Dirichlet sur la frontière $\partial\Omega$.
On se propose de calculer une approximation de la solution de l'équation de level set. Dans la littérature, il existe trois approches très différentes pour établir des schémas numériques. La première approche consiste à étudier l'équation de level set comme une équation de type **hamilton-jacobi**([1]). Une autre façon de procéder est de voir l'équation de level set comme une équation de type **convection** dans la direction normale. Enfin, en prenant le gradient de cette équation, on peut se ramener à un problème de type **loi de conservation**([3, 5]). Ce travail s'appuie sur une combinaison de ces différents points de vue afin de mettre en oeuvre des schémas efficaces pour calculer la solution de viscosité ([2]) de l'équation de level set.
Nous commenons par établir un schéma de type Hamilton-Jacobi qui est consistant mais non monotone. Les essaies numériques mettent en évidence l'instabilité du schéma qui s'explique par le fait qu'il ne tient pas compte de la direction de propagation de l'interface qu'on étudie par l'intermédiaire de l'équation de level set. Une manière de prendre en compte cette propriété physique fondamentale est de réécrire l'équation de level set sous la forme d'une équation de convection dans la direction normale de l'évolution de la frontière libre considérée:

$$\partial_t \Phi + F\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}\cdot\nabla\Phi = 0, \text{ soit encore}$$
$$\partial_t \Phi + \mathbf{v}\cdot\nabla\Phi = 0, \text{ avec } \mathbf{v}(\boldsymbol{x},t,\nabla\Phi) = F(\boldsymbol{x},t)\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}(\boldsymbol{x},t).$$

Ainsi on se ramène un problème de convection non conservative et non linéaire. La difficulté provient de la non linéarité ($\mathbf{v}$ dépend de $\nabla\Phi$). Ce qui rend fastidieux l'utilisation des méthodes déj établies pour ce type d'équation comme la méthode des caractéristiques. Nous donnons une technique de décentrage qui permet d'établir un schéma monotone. Les expériences numériques ne font apparatre aucune instabilité du schéma et nous donnent des estiamtions d'erreurs optimales dans chaque cas. Enfin, nous construisons des schémas d'ordre 2 en temps en utilisant un schéma volume fini pour calculer le gradient de Φ chaque instant.

Références

[1] R. ABGRALL: *Numerical Discretization of the First-order Hamilton-Jacobi equations on Triangular Meshes*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1996.

[2] M.G. CRANDALL ET P.L. LIONS: *Two Approximations of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Math. Comp. 1984.

[3] L. CORRIAS, M. FALCONE, AND R. NATALINI: *Numerical Schemes for conservation laws via Hamilton-Jacobi Equations*, Mathematics of computation, 1995.

[4] S. OSHER AND J.A. SETHIAN: *Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-jacobi formulations.* J. Comput. Phys. 1988.

[5] J. SHIN AND W. ZHOUPING: *Numerical passage from systems of conservation laws to hamilton-Jacobi equations, and relaxation schemes,* SIAM J. Numer. Anal. 1998.

Malcom DJENNO NGOMANDA – djenno@math.univ-bpclermont.fr
Université blaise pascal, avenue carnot, 63000 Clermont-Ferrand