Calcul de solitons en optique non linéaire

Laurent DI MENZA, Université Paris-Sud Orsay

Les solitons ont toujours fait l'objet d'études intensives dans le contexte de l'optique en tant que structures localisées se propageant dans un milieu non linéaire tout en gardant le même profil transverse. On présente ici des techniques permettant de calculer ces solitons pour deux modèles : le premier est l'équation de Schödinger non linéaire (NLS) bien connue en optique non linéaire

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta\psi + \alpha|\psi|^{2\sigma}\psi = 0, \quad \psi = \psi(t,x) \tag{1}$$

avec $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, pour laquelle on cherche des solutions de la forme $\psi(t,x) = u(x)\exp(i\omega t)$ $(\omega > 0)$, avec $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. L'équation (1) est vérifiée si u est solution du problème elliptique

$$-\omega u + \Delta u + \alpha|u|^{2\sigma}u = 0,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

Dans ce cas, la méthode de tir permet de déterminer numériquement des classes de solutions radiales (i.e. $u(x) \equiv u(\|x\|)$) de (2) : l'état fondamental (strictement positif sur $\mathbb{R}^+$) et les états excités définis comme des solutions s'annulant k fois sur $\mathbb{R}^+$ (voir par exemple [1] pour leur justification rigoureuse). On donnera alors un comportement asymptotique de la solution dans différentes normes à k grand en fonction de σ et de d (on complète ainsi des résultats obtenus théoriquement dans [2]). On calcule également des vortex en dimension 2 d'espace, c'est-à-dire de solutions localisées de [2] de la forme $\psi(t,x) = u(r)\exp(im\theta)\exp(i\omega t)$, où (r,θ) coordonnées polaires de x et où m est un paramètre entier.

Dans un deuxième temps, on calcule les solutions localisées d'un modèle régissant la propagation dans un milieu non linéaire dans lequel le tenseur de susceptibilité est quadratique par rapport aux champs (voir [3] pour une description de tels modèles). Le système couplé à résoudre s'écrit alors

$$\begin{cases} \Delta u - u + \bar{u}v = 0 \\ \Delta v - \rho v + \dfrac{1}{2}u^2 = 0 \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3}$$

On présentera l'algorithme utilisé mêlant la méthode de tir à une méthode de continuation de paramètres pour calculer des états localisés de (3) en dimension quelconque d'espace et les vortex en dimension 2. On montrera alors les différences qualitatives entre ces solitons et ceux de (NLS).

Références

[1] KAJIKIYA R., *Norm estimates for radially symmetric solutions of semilinear elliptic equations*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 347, n. 4, 1995, pp. 1163-1199.

[2] MC LEOD K., TROY W. C., WEISSLER F. B., *Radial solution of* $\Delta u + f(u) = 0$ *with prescribed number of zeros*, J. Diff. Eq., vol. 83, n. 2, 1990, pp. 368-378.

[3] BURYAK A. V., DI TRAPANI P., SKRYABIN D. V., TRILLO S., *Optical solitons due to quadratic nonlinearities: from basic physics to futuristic applications*, Phys. Rep., n. 370 (2002), pp. 63-235.

Laurent DI MENZA – `laurent.dimenza@math.u-psud.fr`
Mathématique, Bâtiment 425, Université Paris-Sud Orsay, 91405 Orsay Cedex