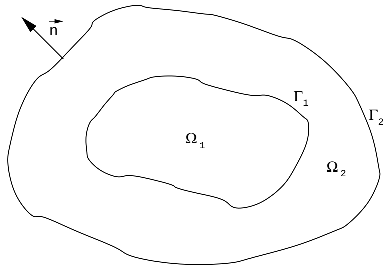
Problèmes inverses : application à l'électroencéphalographie

Céline HOLLANDTS, Université de Technologie de Compiègne

Mots-clés : équations intégrales de frontière, analyse et mise en œuvre numérique

Nous cherchons à identifier la conductivité électrique dans les différentes couches de la tête. Dans notre cas, la géométrie des inclusions est connue (par exemple, grâce à un IRM). Dans un premier temps, nous avons commencé à travailler avec deux couches concentriques.

Soit Ω un domaine borné régulier constitué de deux sous-domaines emboités $\Omega_i \subset \mathbb{R}^3$ de frontière Γ_i où $i = 1, 2$ disposés comme sur la figure. On suppose Γ_i pour $i = 1, 2$ suffisamment **régulier**. σ_i est la conductivité sur Ω_i et nous la supposons constante sur chacun des sous-domaines. On note $\vec{n}$ la normale extérieure. En l'absence de source de courant, les équations du problème liant le potentiel u et la conductivité σ s'écrivent :



$$\begin{cases} \nabla(\sigma.\nabla u) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u = f & \text{sur} \quad \Gamma_2 \\ \sigma_2 \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur} \quad \Gamma_2 \end{cases} \tag{1}$$

Le problème inverse consiste à identifier la conductivité σ avec les deux conditions aux limites f et g connues sur Γ_2.
Nous avons construit un système équivalent au problème (1) : un système d'équations intégrales de frontière (voir Kress [1]) s'écrivant sous la forme :

$$A(\sigma)\,\phi(u, \sigma) = b(\sigma) \tag{2}$$

- $A(\sigma) = A(\sigma_1, \sigma_2)$ est une matrice fonction de σ_1, σ_2
- $b(\sigma)$ est le second membre,
- $\phi(u, \sigma)$ représente le vecteur inconnu fonction du potentiel u et de σ.

Pour les deux problèmes directs (σ donnée, f ou g connu), il y a unicité de la solution pour le problème d'équations aux dérivées partielles et pour le système des équations intégrales (2) découlant du problème (1).

Nous allons résoudre le problème inverse par une méthode itérative : partant d'un σ_{ini} quelconque, à chaque pas nous allons :
- résoudre un problème **direct** (soit de Dirichlet : avec f , soit de Neumann : g connu sur Γ_2)
- minimiser une fonctionnelle coût.
Nous itérons ce procédé jusqu'à ce que le test d'arrêt soit satisfait (l'algorithme choisi est BFGS). Nous utilisons une des deux données sur Γ_2 (f ou g) pour résoudre le problème direct et l'autre donnée dans la fonctionnelle coût à minimiser.

Nous avons conjecturé que, dans le cas de deux couches et pour une donnée de Dirichlet nulle sur une partie du bord extérieur, **une seule** mesure d'un couple (f, g) suffisait pour identifier la conductivité. Une mise en œuvre numérique sera présentée afin de venir appuyer cette hypothèse (algorithme de BFGS où une régularisation de la fonctionnelle coût est envisageable).

Références

[1] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.

Céline HOLLANDTS – cholland@dma.utc.fr
LMAC, UTC - Centre de Recherche de Royallieu 60203 Compiègne