Stabilité de schémas aux différences finies pour la propagation de la lumière dans les milieux complexes

Brigitte BIDEGARAY-FESQUET, LMC-IMAG, Grenoble

Ce travail a été initié par l'article de Petropoulos [2] dans lequel l'auteur analyse la stabilité de schémas aux différences finies pour des couplages des équations de Maxwell 1D (discrétisées par un schéma de Yee [4]) avec les équations de Debye ou de Lorentz. Ces équations étant linéaires, l'étude est faite en calculant le polynôme caractéristique associé à la matrice d'amplification du schéma puis en recherchant les racines numériquement une fois les paramètres physiques et les pas d'espace et de temps fixés.

L'inconvénient de cette approche est qu'il faut recommencer le calcul à chaque fois que l'on change les paramètres physiques ou numériques. Il n'est pas non plus nécessaire de connaître les racines mais uniquement de les localiser (ou non) dans le disque unité du plan complexe. Il est ainsi préférable de déterminer une condition de stabilité reliant pas de temps et pas d'espace à travers les valeurs littérales des paramètres physiques. Ceci s'effectue en utilisant l'analyse de von Neumann (voir par exemple [3]) qui ramène la localisation des racines d'un polynôme à la vérification de conditions "simples" sur les coefficients d'une suite de polynômes de degré décroissant dont le premier est le polynôme caractéristique.

Ce programme d'étude a été réalisé dans un premier temps pour les dimensions 1 et 2 d'espace sur les schémas étudiés dans [2], corroborant et généralisant ses résultats partiels. Ces calculs sont détaillés dans [1]. Etant donné le degré et la complexité des coefficients des polynômes mis en jeu, la généralisation au cas tridimensionnel était inenvisageable en continuant à faire les calculs à la main. L'expertise des dimensions inférieures a néanmoins été très utile à la mise en place d'un environnement de calcul formel (en MAPLE) qui permet d'écrire les équations de manière naturelle en omettant éventuellement certaines dépendances (les équations de Debye et de Lorentz ne dépendent de l'espace que comme paramètre), évitant de nombreuses sources d'erreur dans la saisie des équations de départ. Tout le calcul est automatisé, permettant effectivement de traiter la dimension 3, mais aussi d'autres types de matériaux complexes (plasmas froids, plasmas chauds non collisionnels, milieux magnéto-ioniques, ferrites magnétiques) ou d'autres types de schémas. Une des difficultés du point de vue du calcul formel, qui est aussi une difficulté lorsque l'on fait les calculs manuellement, est la détermination du signe de quantités polynômiales en un grand nombre de variables (une dizaine) d'un degré total assez conséquent (environ vingt en dimension 3) en sachant que certaines variables sont positives et d'autres comprises dans des intervalles connus.

Les résultats obtenus permettent de distinguer certains schémas qui ont la même condition de stabilité que le schéma de Yee sur lequel ils sont basés, et d'autres schémas qui requièrent une condition supplémentaire sur le pas de temps en fonction des paramètres des matériaux (mais pas du pas d'espace). On met également en évidence certains schémas qui se comportent mal dans le cas des valeurs limites admissibles des paramètres physiques, ce qui laisse augurer de mauvaises performances pour des valeurs proches de ces limites.

Références

[1] B. BIDÉGARAY-FESQUET, *Analyse de von Neumann de schémas aux différences finies pour les équations de Maxwell–Debye et Maxwell–Lorentz*, rapport technique LMC-IMAG 1077-M, `http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00005369`, 2005.

[2] P.G. PETROPOULOS, *Stability and phase error analysis of FD–TD in dispersive dielectrics*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 42(1):62-69, 1994.

[3] J.C. STRIKWERDA, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Wadworth & Brooks/Cole, 1989.

[4] K.S. YEE, *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 14(3):302-307, 1966.

Brigitte BIDEGARAY-FESQUET – `Brigitte.Bidegaray@imag.fr`
LMC-IMAG, CNRS UMR 5523, B.P. 53, 38041 Grenoble Cedex 1