

Résultats de convergence pour des problèmes elliptiques dans une géométrie périodique

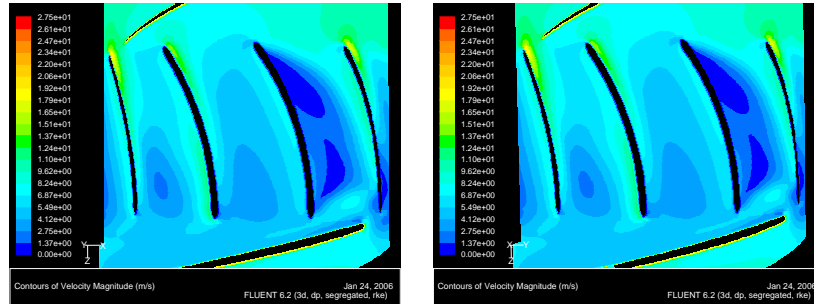
Séverine BAILLET, Institut Français du Pétrole
Antoine HENROT, Institut Elie Cartan Nancy

Motivations

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une thèse menée à l'IFP, portant sur l'optimisation de forme d'une pompe générique de fond de puits, utilisée dans le cadre de la production pétrolière. Une pompe est constituée d'une succession d'étages identiques, disposés en série. La géométrie de la pompe est de type hélico-axiale.

Des études expérimentales ont été menées par l'IFP sur une pompe hélico-axiale, et il a été observé qu'après passage dans plusieurs étages, le comportement du fluide tend à devenir périodique au sens où le gain de pression dans un étage se stabilise, ainsi que les profils de vitesse.

Suite à ce constat, on a réalisé la simulation numérique d'un écoulement de Navier-Stokes dans une pompe à six étages. On observe que le gain de pression dans les étages de la pompe se stabilise après passage dans les premiers étages. Il est identique dans les quatrième et cinquième étages. Les profils de vitesse sont quasiment identiques dans le quatrième étage (ci-dessous à gauche) et le cinquième étage (ci-dessous à droite).



Ces observations nous ont amenés à rechercher des résultats de convergence pour des problèmes elliptiques dans une géométrie périodique.

Résultats mathématiques

Soit Q un ouvert borné, on définit la suite croissante d'ouverts $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que Ω_n soit la réunion de $2n$ cellules élémentaires Q . On considère la solutions u_n du problème elliptique :

$$\begin{cases} Lu_n = f \text{ dans } \Omega_n, \\ u_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_n, \end{cases}$$

où L est un opérateur elliptique et f est périodique. On définit u_∞ comme étant la solution périodique du même problème elliptique posé sur la cellule Q .

Dans ce travail on s'intéresse à la convergence de u_n vers u_∞ pour différents types d'équations : Laplacien, opérateur elliptique général, systèmes d'équations elliptiques. La technique utilisée est différente de celle de M. Chipot et Y.Xie dans [1]. Elle repose sur les méthodes de continuité par rapport au domaine et de Mosco-convergence.

Références

- [1] M. CHIPOT, Y. XIE, *Elliptic problems with periodic data: an asymptotic analysis*, à paraître dans Journ. Math. Pures et Appl..

Séverine BAILLET – severine.baillet@ifp.fr

Institut Français du Pétrole, DTIMA, 1&4 avenue de Bois-Préau, 92852 Rueil-Malmaison Cedex

Antoine HENROT – antoine.henrot@iecn.u-nancy.fr

Institut Elie Cartan Nancy, Universités Nancy-CNRS-INRIA, BP 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex