Approximation du système de Stokes ou de Oseen avec une condition de Dirichlet non homogène peu régulière.

Mehdi BADRA, MIP, Université Paul Sabatier Toulouse 3

Mots-clés : équation de Oseen, Stokes, semi-discrétisation, condition de Dirichlet

On cherche ici à montrer des résultats de convergence pour le système de Oseen semi-discrétisé en espace dans le cas d'une condition de Dirichlet non homogène peu régulière. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, un domaine géométrique, régulier ou polyhèdral, non néssairement convexe. On considère la solution (y, p) du système

$$\partial_t y - \Delta y + (y \cdot \nabla) z + (z \cdot \nabla) y + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot y = 0 \text{ in } \Omega \times (0, T), \tag{1}$$

$$y = g \;\text{ sur }\; \partial\Omega \times (0, T), \quad y(0) = 0, \tag{2}$$

où z est une solution stationnaire du système de Navier-Stokes et $g \in L^p(0, T; [L^2(\partial\Omega)]^d)$ avec $p \in [0, \infty]$. Le système linéaire (1)-(2) intervient dans des travaux récents où g est cherché sous la forme d'une boucle fermée, afin de stabiliser les équations de Navier-Stokes autour d'un équilibre instable z - cf. [1, 4]. L'hypothèse d'un g peu régulier est pertinente dans la mesure où certaines applications issues de la théorie du contrôle imposent des conditions de Dirichlet a priori peu régulières. Il est aussi intéressant de pouvoir disposer d'estimations où seule la norme $L^p(0, T; [L^2(\Omega)]^d)$ de g intervient, par exemple si on s'intéresse à l'approximation d'un contrôle frontière par des fonctions discontinues en espace.
Cependant, si g est seulement dans $L^p(0, T; [L^2(\partial\Omega)]^d)$, nous ne disposons pas d'un relèvement assez régulier - en espace et en temps - qui permettrait de se ramener à une formulation variationelle classique avec condition de Dirichlet homogène. C'est pourquoi, à l'instar de [2], nous avons choisi une approche basée sur la théorie des semigroupes. Il est désormais connu - cf. [3] - que (1)-(2) peut se réécrire sous la forme abstraite suivante:

$$Py' = A_z P y + (\lambda_0 - A_z) P D_z g, \quad Py(0) = 0, \quad (I - P) y(\cdot) = (I - P) D_z g(\cdot).$$

Ici, P est l'opérateur de projection orthogonale de Helmholtz, A_z est l'opérateur de Oseen et D_z est l'opérateur de relèvement associé à A_z. Il s'agit alors de trouver des opérateurs approchés $P_h, A_{z_h,h}$ et $D_{z_h,h}$, disposant de bonnes propriétés d'approximation, puis d'étudier la convergence de y_h, solution de

$$P_h y_h' = A_{z_h,h} P_h y_h + (\lambda_0 - A_{z_h,h}) P_h D_{z_h,h} g, \quad P_h y_h(0) = 0, \quad (I - P_h) y_h(\cdot) = (I - P) D_{z_h,h} g(\cdot).$$

Nous montrons qu'une discrétisation en espace par éléments finis, au moins polynômiale d'ordre 1 pour la vitesse et pour la pression et satisfaisant la condition inf-sup classique, fournit un triplet $(P_h, A_{z_h,h}, D_{z_h,h})$ convenable. Ainsi, l'utilisation de la théorie des multiplicateurs vectoriels de Fourier dans des espaces de Hilbert, nous permet d'obtenir les estimations suivantes:

$$\begin{aligned} \|y - y_h\|_{L^p(0,T;[H^\theta(\Omega)]^d)} &\leq Ch^{\frac{1}{2}-\theta} \|g\|_{L^p(0,T;[L^2(\partial\Omega)]^d)}, \quad 1 < p < \infty, \quad \alpha \leq \theta < 1/2, \\ \|y - y_h\|_{L^p(0,T;[H^\theta(\Omega)]^d)} &\leq Ch^{\frac{1}{2}-\theta} |\ln h| \|g\|_{L^p(0,T;[L^2(\partial\Omega)]^d)}, \quad p = 1, \infty, \quad \alpha \leq \theta < 1/2, \end{aligned}$$

où $\alpha \in [0, 1/2[$ dépend de la géométrie de Ω: $\alpha = 0$ dans le cas d'un domaine Ω régulier ou d'un polyhèdre convexe et $\alpha > 0$ dans le cas d'un polyhèdre non convexe. Bien qu'équivalente, notre approche semble plus simple que celle utilisant la théorie des intégrales singulières - voire par exemple [2, Thm.2.3, 2.4].

Références

[1] V. Barbu, I. Lasiecka, R. Triggiani, *Boundary Stabilization of Navier-Stokes Equations*, Memoirs of the A.M.S., 2005, à paraître.

[2] I. Lasiecka, *Galerkin approximations of abstract parabolic boundary value problems with rough boundary data—L_p theory*, Math. Comp., 47(175):55–75, 1986.

[3] J.-P. Raymond, *Stokes and Navier-Stokes Equations with Nonhomogeneous Boundary Conditions*, 2005, à paraître.

[4] J.-P. Raymond, *Feedback Boundary Stabilization of the two Dimentional Navier-Stokes Equations*, 2005, à paraître dans SIAM Cont. Opt..

Mehdi BADRA – `badra@mip.ups-tlse.fr`
Laboratoire MIP, Université Paul Sabatier Toulouse 3, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE cédex, France