Modélisation de l'influence de la géométrie de la crosse aortique sur la pression artérielle

Y. Maday, N. Poussineau, M. Szopos

Laboratoire Jacques-Louis Lions,
Université Pierre et Marie Curie, Paris VI

- CANUM, 30 mai 2006 -

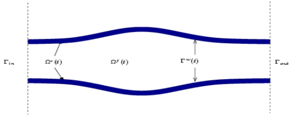
Plan

- Modèle mathématique
- Approche numérique
- Application
- Conclusions et perspectives

Plan

Cadre

- Sang : fluide homogène, incompressible et newtonien, dans le domaine mobile $\Omega^f(t)$; équations de Navier-Stokes.
- Paroi : solide hyperélastique homogène, occupant le domaine $\Omega^s(t)$; équations de l'élasticité linéaire 3D.
- Interface fluide-solide : $\Gamma^w(t)$, où l'on impose des conditions de couplage.

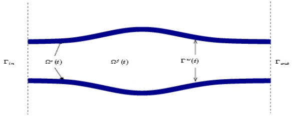


But :

Modéliser l'écoulement sanguin dans l'aorte comme un phénomène complexe d'interaction fluide-structure.

Cadre

- Sang : fluide homogène, incompressible et newtonien, dans le domaine mobile $\Omega^f(t)$; équations de Navier-Stokes.
- Paroi : solide hyperélastique homogène, occupant le domaine $\Omega^s(t)$; équations de l'élasticité linéaire 3D.
- Interface fluide-solide : $\Gamma^w(t)$, où l'on impose des conditions de couplage.



But :

Modéliser l'écoulement sanguin dans l'aorte comme un phénomène complexe d'interaction fluide-structure.

Problème couplé

- Fluide :

$$\rho^f\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t|_{\mathbf{x}_0}} + (\mathbf{w}-\mathbf{u})\cdot\nabla\mathbf{u}\right) - 2\mu\,\mathrm{div}\,\varepsilon(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{0}, \quad \text{dans} \quad \Omega^f(t),$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \quad \text{dans} \quad \Omega^f(t),$$
$$\sigma(\mathbf{u},p)\mathbf{n} = \mathbf{g}_{in-out}, \quad \text{sur } \Gamma_{in-out}.$$

- Solide :

$$\rho^s\frac{\partial^2\mathbf{d}^s}{\partial t^2} - \mathrm{div}_0(F(\mathbf{d}^s)S(\mathbf{d}^s)) = \mathbf{0}, \quad \text{dans} \quad \Omega_0^s,$$
$$\mathbf{d}^s = \mathbf{0}, \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^D,$$
$$F(\mathbf{d}^s)S(\mathbf{d}^s)\mathbf{n}_0^s = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^N.$$

- Conditions du couplage :

géométrique : $\mathbf{d}^f = Ext(\mathbf{d}^s|_{\Gamma_0^w}), \quad \text{dans} \quad \Omega_0^f, \ \Omega^f(t) = (Id + \mathbf{d}^f)(\Omega_0^f),$

en vitesse : $\mathbf{u} = \mathbf{w}, \quad \text{sur} \quad \Gamma^w(t),$

en effort : $F(\mathbf{d}^s)S(\mathbf{d}^s)\mathbf{n}_0 = J(\mathbf{d}^f)\sigma(\mathbf{u},p)F(\mathbf{d}^f)^{-T}\mathbf{n}_0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^w.$

Problème couplé

- Fluide :

$$\rho^f\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t|_{\mathbf{x}_0}} + (\mathbf{w}-\mathbf{u})\cdot\nabla\mathbf{u}\right) - 2\mu \,\mathrm{div}\, \varepsilon(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{0}, \quad \text{dans} \quad \Omega^f(t),$$
$$\mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans} \quad \Omega^f(t),$$
$$\sigma(\mathbf{u},p)\mathbf{n} = \mathbf{g}_{in-out}, \quad \text{sur } \Gamma_{in-out}.$$

- Solide :

$$\rho^s\frac{\partial^2 \mathbf{d}^s}{\partial t^2} - \mathrm{div}_0(F(\mathbf{d}^s)S(\mathbf{d}^s)) = \mathbf{0}, \quad \text{dans} \quad \Omega_0^s,$$
$$\mathbf{d}^s = \mathbf{0}, \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^D,$$
$$F(\mathbf{d}^s)S(\mathbf{d}^s)\mathbf{n}_0^s = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^N.$$

- Conditions du couplage :

$$\text{géométrique :} \quad \mathbf{d}^f = Ext(\mathbf{d}^s|_{\Gamma_0^w}), \quad \text{dans} \quad \Omega_0^f, \ \Omega^f(t) = (Id + \mathbf{d}^f)(\Omega_0^f),$$
$$\text{en vitesse :} \quad \mathbf{u} = \mathbf{w}, \quad \text{sur} \quad \Gamma^w(t),$$
$$\text{en effort :} \quad F(\mathbf{d}^s)S(\mathbf{d}^s)\mathbf{n}_0 = J(\mathbf{d}^f)\sigma(\mathbf{u},p)F(\mathbf{d}^f)^{-T}\mathbf{n}_0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^w.$$

Problème couplé

- Fluide :

$$\rho^f\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t|_{\mathbf{x}_0}} + (\mathbf{w}-\mathbf{u})\cdot\nabla\mathbf{u}\right) - 2\mu\,\mathrm{div}\,\varepsilon(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{0}, \quad \text{dans} \quad \Omega^f(t),$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \quad \text{dans} \quad \Omega^f(t),$$
$$\sigma(\mathbf{u},p)\mathbf{n} = \mathbf{g}_{in-out}, \quad \text{sur} \ \Gamma_{in-out}.$$

- Solide :

$$\rho^s\frac{\partial^2\mathbf{d}^s}{\partial t^2} - \mathrm{div}_0(F(\mathbf{d}^s)S(\mathbf{d}^s)) = \mathbf{0}, \quad \text{dans} \quad \Omega_0^s,$$
$$\mathbf{d}^s = \mathbf{0}, \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^D,$$
$$F(\mathbf{d}^s)S(\mathbf{d}^s)\mathbf{n}_0^s = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^N.$$

- Conditions du couplage :

$$\text{géométrique :} \quad \mathbf{d}^f = Ext(\mathbf{d}^s|_{\Gamma_0^w}), \quad \text{dans} \quad \Omega_0^f, \ \Omega^f(t) = (Id + \mathbf{d}^f)(\Omega_0^f),$$
$$\text{en vitesse :} \quad \mathbf{u} = \mathbf{w}, \quad \text{sur} \quad \Gamma^w(t),$$
$$\text{en effort :} \quad F(\mathbf{d}^s)S(\mathbf{d}^s)\mathbf{n}_0 = J(\mathbf{d}^f)\sigma(\mathbf{u},p)F(\mathbf{d}^f)^{-T}\mathbf{n}_0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^w.$$

Plan

Discrétisation en temps (I)

Soit δt le pas de temps et $t^n = n\delta t$. Supposons que les quantités suivantes sont connues au pas de temps t^n :

- $\Omega^{f,n}$: approximation de $\Omega^f(t^n)$,
- $(\mathbf{u}^n, p^n)$: vitesse et pression du fluide,
- $(\mathbf{d}^{f,n}, \mathbf{w}^n)$: déplacement et vitesse du domaine fluide,
- $(\mathbf{d}^{s,n}, \mathbf{u}^{s,n})$: déplacement et vitesse de la structure ;

But : calculer les mêmes quantités au pas de temps t^{n+1}.

Discrétisation en temps (II)

Supposons $\tilde{\mathbf{d}}^{s,n+1}|_{\Gamma_0^w}$ connu.

- Calcul du domaine fluide :

$$\mathbf{d}^{f,n+1} = Ext(\tilde{\mathbf{d}}^{s,n+1}|_{\Gamma_0^w}), \quad \mathbf{w}^{n+1} = \frac{\mathbf{d}^{f,n+1} - \mathbf{d}^{f,n}}{\delta t},$$

$$\Omega^{f,n+1} = (Id + \mathbf{d}^{f,n+1})(\Omega^{f,n}).$$

- Résolution des équations du fluide par un schéma d'Euler implicite :

$$(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) = \mathcal{F}(\mathbf{d}^{f,n+1}).$$

- Résolution des équations de la structure par un schéma du point milieu :

$$\mathbf{d}^{s,n+1} = \mathcal{S}(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}).$$

Stratégies de couplage

Question :

Comment déterminer $\tilde{\mathbf{d}}^{s,n+1}|_{\Gamma_0^w}$?

Deux possibilités :

- Couplage explicite i.e. exprimer $\tilde{\mathbf{d}}^{s,n+1}|_{\Gamma_0^w}$ en fonction de $\mathbf{d}^s|_{\Gamma_0^w}$ au pas de temps précédents ;
  Problème : le schéma n'est pas stable dans les simulations pour la hémodynamique, car $\rho^f \approx \rho^s$ (Causin, Gerbeau, Nobile 2004)

- Couplage implicite i.e. définir

$$\tilde{\mathbf{d}}^{s,n+1}|_{\Gamma_0^w} = \mathbf{d}^{s,n+1}|_{\Gamma_0^w}$$

Stratégies de couplage

Question :

Comment déterminer $\tilde{\mathbf{d}}^{s,n+1}|_{\Gamma_0^w}$?

Deux possibilités :

- Couplage explicite i.e. exprimer $\tilde{\mathbf{d}}^{s,n+1}|_{\Gamma_0^w}$ en fonction de $\mathbf{d}^s|_{\Gamma_0^w}$ au pas de temps précédents ;
  Problème : le schéma n'est pas stable dans les simulations pour la hémodynamique, car $\rho^f \approx \rho^s$ (Causin, Gerbeau, Nobile 2004)
- Couplage implicite i.e. définir

$$\tilde{\mathbf{d}}^{s,n+1}|_{\Gamma_0^w} = \mathbf{d}^{s,n+1}|_{\Gamma_0^w}$$

Couplage implicite

Le problème s'écrit :

$$(\mathbf{d}^{f,n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) = \mathcal{F}(\mathbf{d}^{s,n+1}),$$

$$\mathbf{d}^{s,n+1} = \mathcal{S}(\mathbf{d}^{f,n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}),$$

donc, par composition :

Trouver un point fixe :

$$\mathbf{d}^{s,n+1} = \mathcal{S} \circ \mathcal{F}(\mathbf{d}^{s,n+1}) \Leftrightarrow \mathbf{d}^{s,n+1} - \mathcal{S} \circ \mathcal{F}(\mathbf{d}^{s,n+1}) = 0.$$

Solution :

Algorithme du type Newton (Gerbeau, Vidrascu 2003).

Couplage implicite

Le problème s'écrit :

$$(\mathbf{d}^{f,n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) = \mathcal{F}(\mathbf{d}^{s,n+1}),$$

$$\mathbf{d}^{s,n+1} = \mathcal{S}(\mathbf{d}^{f,n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}),$$

donc, par composition :

Trouver un point fixe :

$$\mathbf{d}^{s,n+1} = \mathcal{S} \circ \mathcal{F}(\mathbf{d}^{s,n+1}) \Leftrightarrow \mathbf{d}^{s,n+1} - \mathcal{S} \circ \mathcal{F}(\mathbf{d}^{s,n+1}) = 0.$$

Solution :

Algorithme du type Newton (Gerbeau, Vidrascu 2003).

Plan

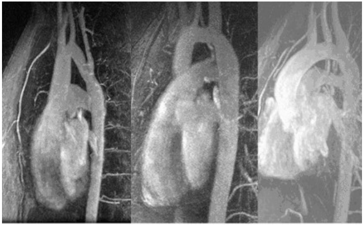
Motivation

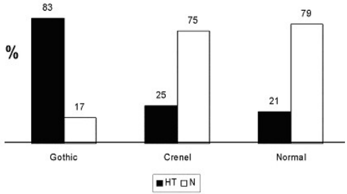
Pathologie : coarctation de l'aorte ; nécessite une réparation chirurgicale.

Principale cause de décès tardif : l'hypertension artérielle.

Travail de l'équipe de l'**Hôpital Necker** :

- classification des différentes formes observées après opération et cicatrisation en trois catégories ;
- étude de la relation entre la pression artérielle au repos et la forme de la crosse aortique.

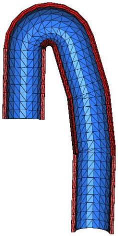




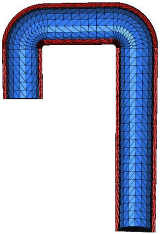
Résultats (1)

- Simulations numériques : solveur couplage fluide-structure de la bibliothèque LifeV.
- Visualisation : Medit et OpenDX.
- Géométries : maillages générés avec Modulef.

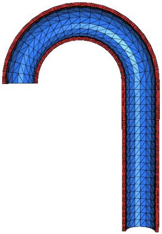
Crosse gothique :



Crosse créneau :

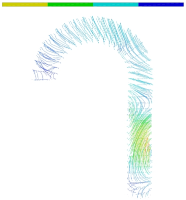


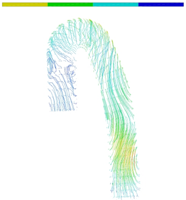
Crosse normale :



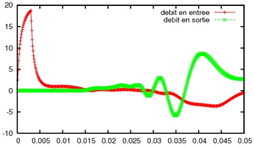
Résultats (2)

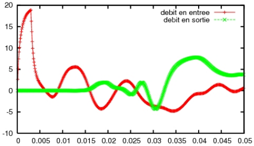
- Lignes de courant : crosse normale vs. crosse pathologique :





- Débit : crosse normale vs. crosse pathologique :





Résultats (3)

- Variation temporelle du débit Q en entrée :

$$\mathrm{OFI} := \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\int_0^T Q \,\mathrm{dt}}{\int_0^T |Q| \,\mathrm{dt}}\right)$$

OFI : *Oscillatory Flow Index* (Taylor et al. 2002)

$$\mathrm{OFI} = 0 \Leftrightarrow \text{débit positif}$$
$$\mathrm{OFI} > 0 \Leftrightarrow \text{recirculations}$$

Ici : OFI crosse normale $= 0$; OFI crosse pathologique > 0.

Plan

Conclusions et perspectives

Conclusions

- Modélisation de l'écoulement sanguin dans l'aorte : phénomène fortement couplé d'interaction fluide-structure ;
- Étude qui permet d'obtenir des comportements qui sont conformes à ce que les médecins ont constaté en IRM.

Perspectives

- Élaboration d'un modèle plus riche ;
- Reconstruction de la géométrie de la crosse aortique à partir de l'imagerie médicale.

Conclusions et perspectives

Conclusions

- Modélisation de l'écoulement sanguin dans l'aorte : phénomène fortement couplé d'interaction fluide-structure ;
- Étude qui permet d'obtenir des comportements qui sont conformes à ce que les médecins ont constaté en IRM.

Perspectives

- Élaboration d'un modèle plus riche ;
- Reconstruction de la géométrie de la crosse aortique à partir de l'imagerie médicale.