

Simulation directe de l'équation de Vlasov sur maillage mobile

Edouard Oudet (LAMA, Université de Savoie)

Eric Sonnendrücker (IRMA, Université de Strasbourg)

1. Projet CALVI de l'INRIA : problématique

CALcul Scientifique et **VI**sualisation.

Projet bilocalisé Nancy-Strasbourg pluridisciplinaire : maths, informatique et physique.

(IECNancy, IRMA Strasbourg, LSIIT Strasbourg, LPMI Nancy).

Axes de recherche :

Etude mathématique et numérique, et visualisation de problèmes issus de la physique des plasmas et des faisceaux de particules.

Difficultés :

- Existence d'échelles multiples.
- Problèmes de grande taille.

Applications :

- Fusion contrôlée :
ITER, laser MégaJoule.

<http://math.u-strasbg.fr/calvi/>

2. Equation de Vlasov (non relativiste)

Fonction de distribution $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ solution de l'équation de **Vlasov** :
 $(f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{x}d\mathbf{v})$ représente la probabilité de trouver des particules dans un élément de volume $d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ au temps t au point (\mathbf{x}, \mathbf{v}) de l'espace des phases.)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \end{array} \right.$$

où $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (force de Lorentz), avec $E(t, \mathbf{x})$ et $B(t, \mathbf{x})$ champs électrique et magnétique moyens autoconsistants, solutions des équations de Maxwell.

Modèle approché : Vlasov-Poisson (ne prend en compte que les effets électrostatiques, B est supposé connu et externe).

3. Equations de Vlasov-Poisson

Densité de charge $\rho(t, \mathbf{x}) = q \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$.

Densité de courant $j(t, \mathbf{x}) = q \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v}$.

$$\begin{cases} \nabla \cdot E & = & \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times E & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E & = & -\nabla\phi \\ -\Delta\phi & = & \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

ε_0 : permittivité du vide, q : charge d'une particule.

4. Numérique pour Vlasov

On peut démontrer qu'avec des conditions initiales régulières, la solution de Vlasov est régulière mais présente de très forts gradients, difficiles à obtenir numériquement.

5. Etat de l'art

Pour résoudre cette équation, deux méthodes possibles :

- Méthode particulière : Particle-in-Cell (PIC)
 - Méthode très bruitée.
 - Difficulté pour obtenir le bon comportement dans les régions à faible densité où pourtant “toute la physique se passe” ! (queue de la distribution, formation de halo, ...)
- Simulation directe : méthode avec maillage de l'espace des phases
 - même résolution partout.
 - Pas de bruit numérique.
 - Diffusion numérique.
 - Coût : N^d points en d dimensions (pour Vlasov $d \leq 6$!).
 - Beaucoup de points inutiles : fonction de distribution nulle.

6. Idée(s)

- Maillage adaptatif : décomposer f sur des grilles uniformes emboîtées et garder les plus grands coefficients
→ maillages hiérarchiques (Michel Mehrenberger, Martin Campos-Pinto)
→ ondelettes (Michaël Gutnic, Matthieu Haefele)
- Maillage mobile : utiliser une grille qui suive l'équation du mouvement global du faisceau (équation de l'enveloppe).
Possible car prédictible en particulier pour les faisceaux de particules soumis à des forces de focalisation.

7. Méthode semi-lagrangienne : principe

“La fonction de distribution f est conservée le long des caractéristiques.”

Pour tout temps s et t ,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f(\mathbf{X}(s; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{V}(s; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), s)$$

$(\mathbf{X}(s; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{V}(s; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t))$ caractéristiques de l'équation de Vlasov :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{X}}{ds} = \mathbf{V} \\ \frac{d\mathbf{V}}{ds} = \mathbf{E}(\mathbf{X}(s) + \mathbf{V}(s) \times \mathbf{B}(\mathbf{X}(s))) \\ \mathbf{X}(t) = \mathbf{x} \\ \mathbf{V}(t) = \mathbf{v} \end{array} \right.$$

8. Méthode semi-lagrangienne : algorithme

Etape 1 Advection : résoudre un grand nombre d'équations différentielles ordinaires découplées (dans l'espace des phases).

Etape 2 Interpolation : calcul de la valeur de la fonction de distribution au pied de la caractéristique. Cette étape nécessite une grille d'interpolation qui peut être différente à chaque pas de temps.

9. Maillage mobile : principe

Superposer à l'espace physique une boîte de calcul dans laquelle la fonction de distribution est non nulle.

De plus, possibilité de diminuer le coût de l'étape d'interpolation en choisissant comme grille d'interpolation une grille adaptée à la fonction de distribution.

Simulations dynamiques de faisceaux de particules :
mouvement global essentiellement déterminé par les forces externes,
mouvement dû aux forces auto-consistantes : prédit par l'équation d'enveloppe.

Donc changer à chaque pas de temps la boîte de calcul en suivant l'équation d'enveloppe peut faire gagner beaucoup de points !

10. Maillage mobile : avantages et inconvénients

Avantages :

- Implémentation très simple ...
- Nombre de points “perdus“ de la grille (*ie* où f est nulle) minimal
- Suivre la trajectoire des particules : minimiser l’erreur d’interpolation nécessaire au calcul de f .

Mais **splitting impossible** ! et interpolation supplémentaire pour le calcul de la densité de charge ρ :

$$\rho = \int f \mathbf{v} \, d\mathbf{v}.$$

11. Méthode semi-lagrangienne (algorithme)

Maillage uniforme de l'espace des phases.

Remontée de la caractéristique :

f^n (fonction de distribution au temps n) connue, calculer f^{n+1} aux points de la grille (x_i, v_j) :

Etape 1 Pour tout (i, j) , calculer le pied de la caractéristique finissant à (x_i, v_j) ie

une approximation de $(\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_j, t_{n+1}), \mathbf{V}(t_n; \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_j, t_{n+1}))$

Etape 2 Comme

$f^{n+1}(x_i, v_j) = f^n(\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_j, t_{n+1}), \mathbf{V}(t_n; \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_j, t_{n+1})),$

f^{n+1} peut être calculée en interpolant f^n qui est connue aux points de la grille $(\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_j, t_{n+1}), \mathbf{V}(t_n; \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_j, t_{n+1}))$.

12. Méthode semi-lagrangienne sur maillage mobile

On définit à chaque pas de temps un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme φ_t de la boîte sur la grille physique de l'espace des phases :

$$\begin{aligned} \text{Boîte (grille logique)} &\xrightarrow{\varphi_t} \text{grille physique} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{v}) &= \varphi_t(\mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*) \end{aligned}$$

N.B La grille logique est choisie uniforme pour simplifier l'interpolation.

La propriété de conservation de f le long des caractéristiques devient

$$\begin{aligned} f^*(\mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*, t) &= f(\varphi_t(\mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*), t) \\ &= f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &= f(\mathbf{X}(s; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{V}(s; \mathbf{x}, \mathbf{v}, s)) \\ &= f(\varphi_s(\mathbf{X}^*(s; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{V}^*(s; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)), s) \\ &= f^*(\mathbf{X}^*(s; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{V}^*(s; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), s). \end{aligned}$$

13. Nouvel algorithme

f^n et φ_{t_n} connues, calculer f^{n+1} :

Etape 1 Calculer les positions dans l'espace des phases des points de la grille logique où l'on va calculer f^{n+1} :

$$(\mathbf{x}_i^{n+1}, \mathbf{v}_j^{n+1}) = \varphi_{t_{n+1}}(\mathbf{x}_i^*, \mathbf{v}_j^*).$$

Etape 2 Calculer le pied $(\mathbf{X}_i^n, \mathbf{V}_j^n)$ de la caractéristique finissant à $(\mathbf{x}_i^{n+1}, \mathbf{v}_j^{n+1})$.

Etape 3 Ramener $(\mathbf{X}_i^n, \mathbf{V}_j^n)$ sur la grille logique

$$(\mathbf{X}_i^{*n}, \mathbf{V}_j^{*n}) = \varphi_{t_n}^{-1}(\mathbf{X}_i^n, \mathbf{V}_j^n).$$

Etape 4 Interpoler f^{*n} :

$$f^{*n+1}(\mathbf{x}_i^*, \mathbf{v}_j^*) = f^{*n}(\mathbf{X}_i^{*n}, \mathbf{V}_j^{*n})$$

Seules les étapes 2 et 4 sont nouvelles !

14. Choix de la boîte

La boîte au temps t^{n+1} est calculée à partir de l'enveloppe RMS du faisceau au temps t^n : On définit l'ellipse RMS par :

$$\tan 2\theta = \frac{2 \langle xx' \rangle}{\langle xx \rangle - \langle x'x' \rangle}$$

$$a = \sqrt{2(\cos^2(\theta) \langle xx \rangle + \sin^2(\theta) \langle x'x' \rangle + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \langle xx' \rangle)}$$

$$b = \sqrt{2(\sin^2(\theta) \langle xx \rangle + \cos^2(\theta) \langle x'x' \rangle - 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \langle xx' \rangle)}$$

$$\text{où } \langle \chi(x, x') \rangle = \frac{\int \chi(x, x') f(x, x') dx dx'}{\int f(x, x') dx dx'}$$

et $x' = \frac{v_x}{v_z}$, v_z vitesse longitudinale du faisceau.

15. Choix de la boîte

Deux choix :

→ Boîte rectangulaire

→ Boîte elliptique

16. Faisceau gaussien focalisé périodiquement

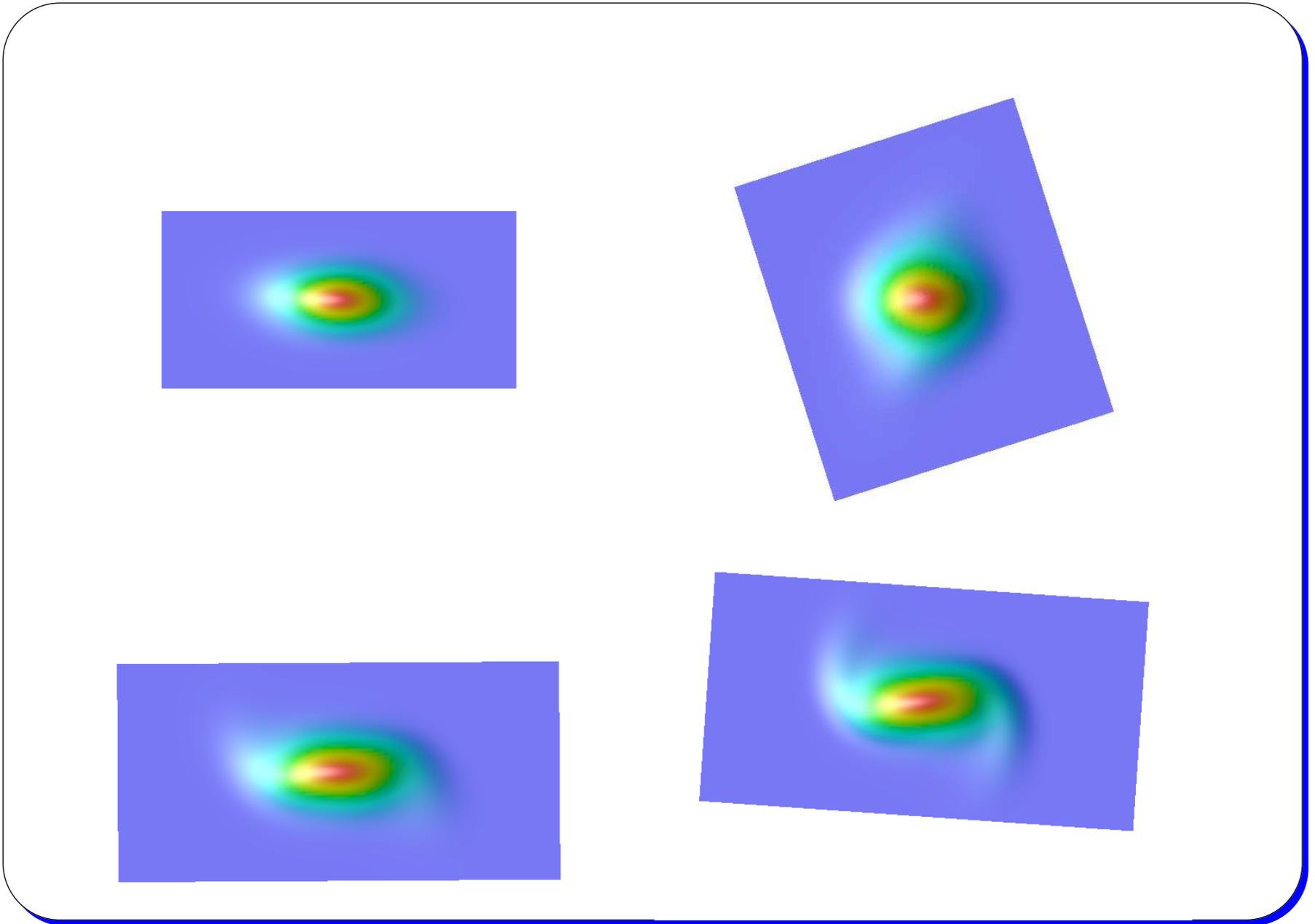
$$f_0(r, v_r) = n_0 e^{-\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{v^2}{v_{th}^2}\right)}$$

$$E_{appl} = \alpha r$$

de façon périodique.

17. Maillage mobile : résultats en 1D

Boîte de calcul et fonction de distribution après 1, 20, 40 et 80 pas de temps :



18. Conclusion et perspectives

- Méthode prometteuse et facilement implémentable (dans tout algorithme semi-lagrangien) !
- Implémentation dans la plate-forme logicielle de CALVI.
- Cas tests plus réalistes : 2D.