Une perturbation hyperbolique des équations de Navier-Stokes

Geneviève Raugel

Université Paris-Sud et CNRS, Orsay (France)
Genevieve.Raugel@math.u-psud.fr

A Michel Crouzeix

MERCI

MICHEL

M. Paicu   Université Paris-Sud, Orsay (France)

Motivations

Y. Brenier, R. Natalini et M. Puel ont introduit la version relaxée des équations d'Euler

$$\begin{aligned} u_t + \operatorname{div} V &= \nabla q \\ V_t + \nu \nabla u &= -\frac{1}{\eta}(V - u \otimes u) \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ (u, V)(0, x) &= (u_0(x), V_0(x)), \end{aligned}$$

pour $(t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^2$.

Quand η tend vers 0, on retrouve formellement les équations d'Euler :

$$\begin{aligned} u_t + \operatorname{div}(u \otimes u) &= \nabla q \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ u(0, x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

Motivations (suite)

En considérant ensuite le changement d'échelle diffusif

$$u^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} u(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}) \ , \ V^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon} V(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}})$$

$$q^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon} q(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}),$$

et en posant $\eta = 1$, ils ont obtenu les équations

$$\begin{aligned} u^\varepsilon_t + \mathrm{div}\, V^\varepsilon &= \nabla q^\varepsilon \\ \varepsilon V^\varepsilon_t + \nu \nabla u^\varepsilon &= -(V^\varepsilon - u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon) \\ \mathrm{div}\, u^\varepsilon &= 0 \\ (u^\varepsilon, V^\varepsilon)(0,x) &= (u^\varepsilon_0(x), V^\varepsilon_0(x)), \end{aligned}$$

En éliminant l'inconnue V^ε, on obtient la version hyperbolique des équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \varepsilon u^\varepsilon_{tt} + u^\varepsilon_t - \nu P \Delta u^\varepsilon &= P \mathrm{div}\,(-u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon) \\ \mathrm{div}\, u^\varepsilon &= 0, \\ (u^\varepsilon, u^\varepsilon_t)(0,x) &= (u^\varepsilon_0, u^\varepsilon_{t0}) \equiv (\varphi_0(x), \psi_0(x)), \end{aligned}$$

Les équations $(\mathrm{HNS})_\varepsilon$ et (NS)

$$
\begin{aligned}
\varepsilon u^\varepsilon_{tt} + u^\varepsilon_t - \nu P\Delta u^\varepsilon &= P(-u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon) + Pf \\
\operatorname{div} u^\varepsilon &= 0, \\
(u^\varepsilon, u^\varepsilon_t)(0,x) &= (\varphi_0(x), \psi_0(x)),
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
v_t - \nu P\Delta v &= P(-v \cdot \nabla v) + Pf \ , \quad \operatorname{div} v = 0, \\
v(0,x) &= \varphi_0(x),
\end{aligned}
$$

a) Si $(\varphi_0(x), \psi_0(x)) \in H^s \times H^{s-1}$, $s \geq 2$, existence locale et unicité de $(u^\varepsilon, u^\varepsilon_t)$ dans l'espace $C^0([0,\tau], H^s \times H^{s-1})$.
b) Si $(\varphi_0(x), \psi_0(x)) \in H^2 \times H^1$, et s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$
\|\varphi_0\|_{H^1} \leq C \ , \ \|\psi_0\|_{H^1} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \ , \ \|\varphi_0\|_{H^2} \leq \frac{C_0}{\sqrt{\varepsilon}} \ ,
$$

où $C_0 > 0$, la solution de $(\mathrm{HNS})_\varepsilon$ est globale et on a l'estimation

$$
\|u^\varepsilon - v\|^2_{L^2} \leq C_T \sqrt{\varepsilon} \ , \ \forall 0 \leq t \leq T \ .
$$

Y. Brenier, R. Natalini, M. Puel (Proc. of the AMS (2004)).

Ingrédients de la preuve de B.N.P. : Estimations d'énergie, estimation L^∞ et énergie modulée de Dafermos.

But de cet exposé : Considérer des données moins régulières (dans $H^1 \times L^2$) et donner de meilleures estimations entre u^ε et v (et entre u^ε_t et v_t).

Outils : Estimations de Strichartz, estimations d'énergie et estimations avec poids en temps ($\|t(u^\varepsilon - v)\|_{H^1}$ et $\|t(u^\varepsilon_t - v_t)\|_{L^2}$).
(G. R., Equadiff. Berlin 1999, World Scientific; J. Hale et G.R. 1989,1992).

PLAN :

1) Changement d'échelle, inégalités de Strichartz
2) Fonctionnelle d'énergie et existence globale
3) Existence locale
4) Comparaison des solutions sur un intervalle de temps fini
5) Cas du domaine $\mathbf{T}^2$

1) Changement d'échelle et inégalité de Strichartz

Le changement d'échelle

$$u^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} u(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}) \ , \ f(t,x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} f^*(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}})$$

$$p^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon} p(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}),$$

transforme l'équation $(\mathrm{HNS})_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \varepsilon u^\varepsilon_{tt} + u^\varepsilon_t - \nu\Delta u^\varepsilon &= -u^\varepsilon\cdot\nabla u^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon + f \\ \mathrm{div}\, u^\varepsilon &= 0, \\ (u^\varepsilon, u^\varepsilon_t)(0,x) &= (u^\varepsilon_0(x), u^\varepsilon_{t0}(x)), \end{aligned}$$

en l'équation (HNS) :

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_t - \nu\Delta u &= -u\cdot\nabla u - \nabla p + f^* \\ \mathrm{div}\, u &= 0, \\ (u, u_t)(0,x) &= (\sqrt{\varepsilon} u^\varepsilon_0(\sqrt{\varepsilon}x), \varepsilon^{3/2} u^\varepsilon_{t0}(\sqrt{\varepsilon}x)) \end{aligned}$$

Propriétés :

$$\|u_0\|_{L^2} = \|u^\varepsilon_0\|_{L^2} \ , \ \|\nabla u_0\|_{L^2} = \sqrt{\varepsilon}\|\nabla u^\varepsilon_0\|_{L^2}$$

$$\|f^*\|_{L^p_t(L^2_x)} = \varepsilon^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p_t(L^2_x)}$$

$$\|D^{-1}f^*\|_{L^2_t(L^2_x)} = \|D^{-1}f\|_{L^2_t(L^2_x)}$$

Inégalités de Strichartz

BUT : Estimation de u dans $L_t^p(L_x^\infty)$ $(p = 4)$.

Problème auxiliaire affine :

$$w_{tt} + w_t - \nu \Delta w = h_1 + h_2$$
$$(w, w_t)(0, x) = (\varphi_0, \psi_0).$$

Décomposition dyadique :

$$w = \sum_{-1 \le j \le j_0} \Delta_j w + \sum_{j > j_0} \Delta_j w = S_0 w + (I - S_0) w$$

où $\Delta_j w = \mathcal{F}^{-1}(\phi(\frac{\xi}{2^j}) \mathcal{F} w(\xi))$ et supp$\phi \subset \mathcal{C}$ et où j_0 est bien choisi.

Proposition 1 On a l'inégalité, pour $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \|(I - S_0) w\|_{L_t^4(L_x^\infty)} \le C[&\|(I - S_0)\varphi_0\|_{H^{\frac{3}{4}+\delta}} \\ &+ \|(I - S_0)\psi_0\|_{H^{-\frac{1}{4}+\delta}} \\ &+ \|(I - S_0) h_1\|_{L_t^2(H^{-\frac{1}{12}+\delta})} \\ &+ \|(I - S_0) h_2\|_{L_t^1(H^{-\frac{1}{4}+\delta})}] \end{aligned}$$

Idée de la preuve

On pose $w_j(\tau, y) = \Delta_j w(2^{-j}\tau, 2^{-j}y)$. Le support de $\widehat{w}_j \subset \mathcal{C}$ et $\widehat{w}_j$ est solution de l'équation différentielle :

$$\widehat{w}_{jtt} + 2^{-j}\widehat{w}_{jt} + \nu|\xi|^2\widehat{w}_j = 2^{-2j}\mathcal{F}(\Delta_j h_1 + \Delta_j h_2)$$

dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_j^{\pm} = \frac{-2^{-j} \pm (2^{-2j} - 4|\xi|^2\nu)^{1/2}}{2}$$

On choisit j_O de sorte que $4|\xi|^2\nu > 2^{-2j_0}$ pour $\xi \in \mathcal{C}$.
On applique alors le lemme de la phase stationnaire pour h_2. Pour h_1, on tient compte du fait que $\mathrm{Re}\lambda_j^{\pm} = -2^{-j-1}$.

Proposition 2 (Lemme de Bernstein)
Pour tout $U \in L^2$, on a :

$$\|S_0 U\|_{L^\infty} \leq C 2^{j_0}\|S_0 U\|_{L^2} \leq C_0\|S_0 U\|_{L^2}$$

Notation
$V = \{u \in (H^1)^2; \operatorname{div} u = 0\}, H = \{u \in (L^2)^2; \operatorname{div} u = 0\}$.

2) Fonctionnelle d'énergie et existence globale

Théorème 1 Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que, pour $\varepsilon > 0$, si

$$\begin{aligned} &\|u_0^\varepsilon\|_{L^2} + \varepsilon\|u_{t0}^\varepsilon\|_{L^2} + \sqrt{\varepsilon}\|\nabla u_0^\varepsilon\|_{L^2} \\ &\qquad + \sqrt{\varepsilon}\|f\|_{L_t^2(L_x^2)} + \|D^{-1}f\|_{L_t^2(L_x^2)} \leq C_0, \end{aligned} \tag{1}$$

l'équation $(\mathrm{HNS})_\varepsilon$ admet une unique solution forte globale $(u^\varepsilon, u_t^\varepsilon) \in C^0([0,+\infty), V \times H)$.

Preuve

- On se ramène à l'équation (HNS). La condition (1) devient

$$\|u_0\|_{L^2} + \|u_{t0}\|_{L^2} + \|\nabla u_0\|_{L^2} + \|f^*\|_{L_t^2(L_x^2)} + \|D^{-1}f^*\|_{L_t^2(L_x^2)} \leq C_0, \tag{2}$$

-Si on multiplie l'équation (HNS) par $u + 2u_t$ et on intègre, on a

$$\frac{d}{dt}E(t) + \frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq c(\|f^*\|_{L^2}^2 + \|D^{-1}f^*\|_{L^2}^2 + |\int_{\mathbf{R}^2} u\nabla u \cdot u dx|)$$

où $E(t)$ est la fonctionnelle classique

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u + u_t\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla u\|_{L^2}^2$$

Existence globale (suite)

-Si on intègre en temps, on obtient

$$E(t)+\frac{1}{2}\int_0^t \|u_t\|_{L^2}^2 ds+\frac{\nu}{2}\int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 ds \leq$$
$$E(0)+c\|f^*\|^2_{L^2_t(L^2_x)}+c\|D^{-1}f^*\|^2_{L^2_t(L^2_x)}$$
$$+c\int_0^t \|u\|_{L^\infty_x}\|\nabla u\|_{L^2_x}\|u_t\|_{L^2_x} ds$$

-On écrit ensuite

$$\int_0^t \|u\|_{L^\infty_x}\|\nabla u\|_{L^2_x}\|u_t\|_{L^2_x} ds \leq$$
$$\|S_0 u\|_{L^\infty_t(L^\infty_x)}\int_0^t \|\nabla u\|_{L^2_x}\|u_t\|_{L^2_x} ds+$$
$$\|(I-S_0)u\|_{L^4_t(L^\infty_x)}\|\nabla u\|^2_{L^4_t(L^2_x)}\|\nabla u\|^{1/2}_{L^\infty_t(L^2_x)}\|u_t\|_{L^2_t(L^2_x)}$$

-On applique les propositions 1 et 2.

-On obtient une condition de petitesse.

Existence globale (suite)

En fait, on peut démontrer le résultat suivant (dont la preuve est plus longue)

<u>Théorème 2</u> Pour toute constante $C > 0$, il existe $C_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ tels que, pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, si

$$\|u_0^\varepsilon\|_{L^2} \leq C \ , \ \|D^{-1} f\|_{L_t^2(L_x^2)} \leq C,$$
$$\varepsilon\|u_{t0}^\varepsilon\|_{L^2} + \sqrt{\varepsilon\nu}\|\nabla u_0^\varepsilon\|_{L^2} + \sqrt{\varepsilon}\|f\|_{L_t^2(L_x^2)} \leq C_0, \tag{3}$$

l'équation $(\text{HNS})_\varepsilon$ admet une unique solution forte globale $(u^\varepsilon, u_t^\varepsilon) \in C^0([0, +\infty), V \times H)$.

3) Existence locale sur un intervalle de temps long

On suppose maintenant qu'il existe $C > 0$ et $T > 0$ tels que

$$\|u_0^\varepsilon\|_{L^2} \leq C \ , \ \|f\|_{L^2((0,T),L^2)} \leq C.$$

Soit $v(t) \in C^0([0,T],H)$ la solution forte de (NS) avec $v(0) = u_0^\varepsilon$.

<u>Théorème 3</u> Il existe $C_0 > 0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(C,T) > 0$ tels que, pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, si

$$\begin{aligned} &\|u_0^\varepsilon\|_{L^2} \leq C \ , \ \|f\|_{L^2((0,T),L^2)} \leq C \\ &\varepsilon\|u_{t0}^\varepsilon\|_{L^2} + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\nu}\|\nabla u_0^\varepsilon\|_{L^2} \leq C_0, \end{aligned} \tag{4}$$

l'équation $(\mathrm{HNS})_\varepsilon$ admet une (unique) solution forte $(u^\varepsilon, u_t^\varepsilon) \in C^0([0,T], V \times H)$ et on a, pour $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon(t) - v(t)\|_{L^2} \leq &\exp K(T,C) \\ &\times (C\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon\|u_{t0}^\varepsilon\|_{L^2} + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\nu}\|\nabla u_0^\varepsilon\|_{L^2}) \end{aligned} \tag{5}$$

Preuve

-On remarque que $w = u^\varepsilon - v$ satisfait à

$$\varepsilon w_{tt} + w_t - \nu \Delta w = P(-u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) + P(v\nabla v) - \varepsilon v_{tt}$$

$$w(0,x) = 0$$

-On considère l'énergie modulée de Dafermos

$$E_v^\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\|u^\varepsilon - v + \varepsilon u_t^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\|u_t^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon\nu\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2}^2$$

Par un calcul classique, on obtient

$$E_v^\varepsilon(t) + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^T \|u_t^\varepsilon\|_{L^2}^2 ds + \frac{\nu}{2}\int_0^T \|\nabla(u^\varepsilon - v)\|_{L^2}^2 ds \leq$$
$$E_v^\varepsilon(0) + c\varepsilon\|f\|_{L^2((0,T),L^2)}^2 + c\varepsilon\int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}|u^\varepsilon\nabla u^\varepsilon|^2 dxds$$
$$+\int_0^T \|v\|_{L_x^\infty}^2\|u^\varepsilon - v\|_{L_x^2}^2 ds$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}|u^\varepsilon\nabla u^\varepsilon|^2 dxds \leq & c\int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}|S_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}(u^\varepsilon - v).\nabla u^\varepsilon|^2 dxds \\ & + c\int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}|S_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}v.\nabla u^\varepsilon|^2 dxds \\ & + c\int_0^T\int_{\mathbf{R}^2}|(I - S_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}})u^\varepsilon.\nabla u^\varepsilon|^2 dxds\end{aligned}$$

Fin de la preuve

On applique l'inégalité de Strichartz :

$$\begin{aligned}
\|(I - S_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}})u^\varepsilon\|_{L_t^4(L_x^\infty)} \leq C[&\varepsilon^{\frac{1}{4}+\delta}\|(I - S_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}})u_0^\varepsilon\|_{H^{\frac{3}{4}+\delta}} \\
&+\varepsilon^{\frac{5}{4}+\delta}\|(I - S_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}})\psi_0\|_{H^{-\frac{1}{4}+\delta}} \\
&+\varepsilon^{\frac{5}{12}+\delta}\|(I - S_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}})f\|_{L_t^2(H^{-\frac{1}{12}+\delta})} \\
&+\varepsilon^{\frac{5}{12}+\delta}\|(I - S_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}})P(u^\varepsilon.\nabla u^\varepsilon)\|_{L_t^2(H^{-\frac{1}{12}+\delta})}]
\end{aligned}$$

-Pour finir, on applique le lemme de Gronwall.

4) Comparaison des solutions sur un intervalle de temps fini

Soit $v(t) \in C^0([0,T],H)$ la solution forte de (NS) avec $v(0) = u_0^\varepsilon$, où $T > 0$. Soit $\beta > 0$ donné.

Théorème 4 Il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(C,T) > 0$ tel que, pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, si

$$\|u_0^\varepsilon\|_{H^1} + \sqrt{\varepsilon}\|u_{t0}^\varepsilon\|_{L^2} + \|f\|_{L^2((0,T),L^2)} + \|(\nu(-\Delta + \beta I))^{-1/2} f(0,.)\|_{L^2_x} \leq C, \tag{6}$$

l'équation $(\mathrm{HNS})_\varepsilon$ admet une (unique) solution forte $(u^\varepsilon, u_t^\varepsilon) \in C^0([0,T], V \times H)$ et on a, pour $0 \leq t \leq T$,

$$\sqrt{\varepsilon}\|\frac{d}{dt}t(u^\varepsilon(t) - v(t))\|_{L^2} + \|t(u^\varepsilon(t) - v(t))\|_{H^1} \leq \varepsilon \exp K(T,C) \tag{7}$$

Preuve: Elle consiste en trois étapes

Preuve

Etape 1:

On écrit $u^\varepsilon = u_1 + u_2$ où u_1 est solution de

$$\varepsilon u_{1tt} + u_{1t} - \nu\Delta u_1 = 0$$
$$(u_1, u_{1t})(0,x) = (0, u^\varepsilon_{t0})$$

On introduit la fonctionnelle

$$E_1(t) = \frac{1}{2}\|u_1 + \varepsilon u_{1t}\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\|u_{1t}\|^2_{L^2} + \varepsilon\nu\|\nabla u_1\|^2_{L^2}$$

Comme ci-dessus, on obtient, pour $t \geq 0$,

$$\|u_1(t)\|^2_{L^2} + \varepsilon^2\|u_{1t}(t)\|^2_{L^2} + \varepsilon\nu\|\nabla u_1(t)\|^2_{L^2}$$
$$+ \int_0^\infty (\varepsilon\|u_{1t}(s)\|^2_{L^2} + \|\nabla u_1(s)\|^2_{L^2})ds \leq c\varepsilon^2\|u^\varepsilon_{t0}\|^2_{L^2}$$

Etape 2:

On introduit $A = \nu(-\Delta + \beta I)$ où $\beta > 0$ et on suppose que $\|A^{-1/2}Pf(0,\cdot)\|_{L^2_x} \leq C$.

On remarque que $w_2 = v - u_2$ est solution de

$$\varepsilon w_{2tt} + w_{2t} - \nu\Delta w_2 + P(v\nabla v) - P(u^\varepsilon\nabla u^\varepsilon) = \varepsilon v_{tt}$$
$$(w_2, w_{2t})(0,x) = (0, \nu\Delta u^\varepsilon_0 - P(u^\varepsilon_0\nabla u^\varepsilon_0) + Pf(0,.))$$

Preuve (suite)

On multiplie l'équation par $A^{-1}(w_2+2\varepsilon w_{2t})$ et on intègre en x et t. Après un calcul un peu fastidieux, on obtient, pour $0 \le t \le T$,

$$\int_0^T \|(v-u_2)(s)\|_{L^2}^2 ds \le c\varepsilon^2 \exp K(C,T)$$

Etape 3:

On pose $z = t(u^\varepsilon - v)$ On remarque que z est solution de

$$\begin{aligned} \varepsilon z_{tt} + z_t - \nu\Delta z + tP(u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) - tP(v\nabla v) = \\ - \varepsilon t v_{tt} + 2\varepsilon(u_t^\varepsilon - v_t) + (u^\varepsilon - v) \end{aligned}$$

et

$$(z(0,x), z_t(0,x)) = (0,0)$$

En utilisant les deux étapes précédentes et l'inégalité de Strichartz, on montre que, pour $0 \le t \le T$,

$$\sqrt{\varepsilon}\|z_t(t)\|_{L^2} + \|z(t)\|_{H^1} \le \varepsilon \exp K(T,C)$$

Le cas du domaine $\mathbf{T}^2$

-On considère l'espace des fonctions à moyenne totale nulle.

- Tous les résultats ci-dessus sont encore vrais (et même meilleurs).

-Si $f \in L^2(\mathbf{T}^2)$ ne dépend pas du temps, on montre qu'il existe un attracteur global compact, c'est-à-dire un ensemble compact $\mathcal{A}_\varepsilon$, invariant par le flot, qui attire toutes les trajectoires des ensembles bornés de $V \times H$. On peut comparer cet attracteur global $\mathcal{A}_\varepsilon$ à l'attracteur compact $\mathcal{A}$ des équations de Navier-Stokes. On obtient la semi-continuité supérieure des attracteurs.