

Modélisation Mathématique des Mouvements de Foule

JULIETTE VENEL¹, BERTRAND MAURY²

^{1,2}Laboratoire de Mathématiques, Université Paris XI, Orsay

Introduction

Le modèle de foule que nous proposons est basé sur une approche Lagrangienne où chaque individu est pris en compte. Nous nous intéressons ici à la modélisation de situations d'évacuation : plusieurs personnes se trouvent dans une salle contenant des obstacles et veulent se diriger vers la sortie.

Présentation du Modèle

Notre modèle repose sur deux principes :

- 1) On définit un champ de vitesses souhaitées, vitesses qu'auraient les individus en l'absence des autres. Cette vitesse dépend de la position de la personne par rapport à la sortie et aux différents obstacles se trouvant dans la pièce.
- 2) Les personnes, lors de leur déplacement se gênent mutuellement et rencontrent des obstacles. Leur vitesse réelle est différente de leur vitesse souhaitée. Dans notre modèle, la vitesse réelle est la projection euclidienne de la vitesse souhaitée sur l'ensemble des vitesses admissibles.

I Définitions, Notations

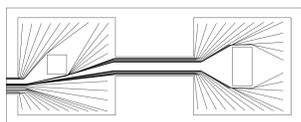
Les N individus sont assimilés à des disques de rayon r , repérés par les coordonnées de leurs centres : $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \in \mathbb{R}^{2N}$. Ce vecteur position doit appartenir à un ensemble de configurations admissibles :

$$Q_0 = \{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i, j, i \neq j, D_{ij}(\mathbf{q}) = |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j| - 2r \geq 0 \}$$

Remarque : on peut ajouter des contraintes liées à la présence d'obstacles, ce qui n'a pas été fait ici, par souci de clarté.

1. Vitesse souhaitée

La vitesse souhaitée des N personnes est : $\mathbf{U}(\mathbf{q}) = (U_0(\mathbf{q}_1), \dots, U_0(\mathbf{q}_N)) \in \mathbb{R}^{2N}$. Un individu se déplaçant avec cette vitesse minimise la distance à parcourir pour atteindre la sortie. On a représenté ci-dessous le flot du champ des vitesses souhaitées pour une salle particulière.



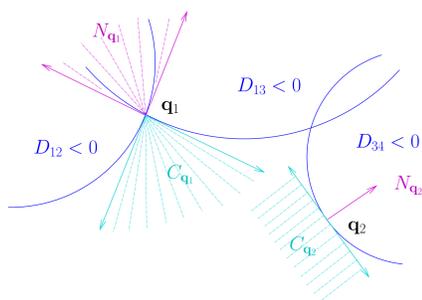
2. Vitesse réelle

La vitesse réelle notée \mathbf{u} respecte la contrainte de non-chevauchement des disques. On introduit le cône des vitesses admissibles en \mathbf{q} :

$$C_{\mathbf{q}} = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} \geq 0 \}$$

où $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) = \nabla D_{ij}(\mathbf{q})$ et son cône polaire :

$$N_{\mathbf{q}} = C_{\mathbf{q}}^\circ = \{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall \mathbf{v} \in C_{\mathbf{q}}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \leq 0 \} \\ = \{ -\sum \mu_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}), \mu_{ij} \geq 0, \mu_{ij} = 0 \text{ si } D_{ij}(\mathbf{q}) > 0 \}$$



II Equation d'évolution

En précisant le lien entre vitesse réelle et vitesse souhaitée (second point de notre modèle), on aboutit à une équation d'évolution sur la position :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= P_{C_{\mathbf{q}}} \mathbf{U} \\ \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} &= (Id - P_{N_{\mathbf{q}}}) \mathbf{U} \\ \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} + P_{N_{\mathbf{q}}} \mathbf{U} &= \mathbf{U} \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{q}} + N_{\mathbf{q}} \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (1)$$

III Résultats théoriques

1. Cas particuliers simples

En dimension 1 (personnes dans un couloir) ou dans le cas d'une seule personne dans une pièce convexe :

$$Q_0 \text{ convexe} \Rightarrow N \text{ opérateur maximal monotone } (N_{\mathbf{q}} = \partial I_{Q_0}(\mathbf{q})) \\ \Rightarrow \text{existence et unicité d'une solution vérifiant (1)} \\ \text{avec une condition initiale } \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \in Q_0 \quad [1]$$

2. Cas général

Dans des cas plus généraux, personnes multiples dans une pièce quelconque, Q_0 n'est plus convexe. Il est en revanche prox-régulier au sens suivant (cf [2]) :

$$Q_0 \text{ est prox-régulier s'il existe un réel } r > 0 \text{ tel que} \\ \text{pour tout point } \tilde{\mathbf{q}} \text{ à distance } d < r \text{ de } Q_0, \\ \text{la projection de } \tilde{\mathbf{q}} \text{ sur } Q_0 \text{ soit bien définie.}$$

Notre problème s'inscrit dans le cadre des processus de rafle introduits par Moreau [3] dans les années 70. Cependant, la présence d'un second membre \mathbf{U} et la non-régularité de Q_0 nécessitent l'utilisation de résultats très récents de L. Thibault et J. F. Edmond [4, 5] pour obtenir le théorème suivant :

Théorème 1 On suppose \mathbf{U} Lipschitz.

Alors $\forall \mathbf{q}_0 \in Q_0, \exists ! \mathbf{q}(\cdot)$ absolument continue vérifiant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(t) + N(\mathbf{q}(t)) \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}(t)) \text{ pp sur } [0, T] \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \end{cases}$$

IV Présentation du schéma numérique

$$\begin{aligned} \text{Initialisation : } \mathbf{q}^0 &= \mathbf{q}_0 \\ \text{Boucle en temps : } \mathbf{q}^n \text{ connu} \\ \mathbf{u}^n &= P_{C_h(\mathbf{q}^n)}(\mathbf{U}(\mathbf{q}^n)) \\ \text{où } C_h(\mathbf{q}^n) &= \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{ij}(\mathbf{q}^n) + h \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}^n) \cdot \mathbf{v} \geq 0 \} \\ \mathbf{q}^{n+1} &= \mathbf{q}^n + h \mathbf{u}^n \end{aligned}$$

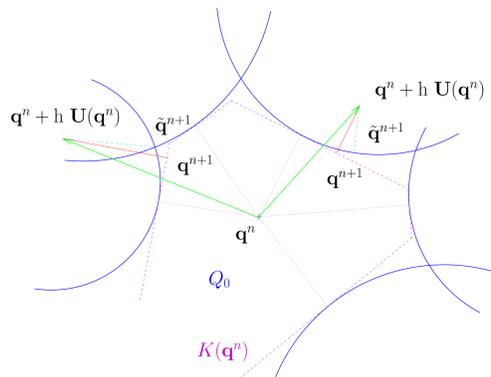
Cet algorithme s'inspire d'un schéma initialement développé pour les écoulements granulaires [6]. \mathbf{u}^n est approché numériquement par l'algorithme d'Uzawa (algorithme de gradient sur le problème dual).

Remarque : Il y a existence et unicité de \mathbf{u}^n solution du problème primal : $\min_{\mathbf{v} \in C_h(\mathbf{q}^n)} |\mathbf{v} - \mathbf{U}(\mathbf{q}^n)|^2$, mais on n'a pas unicité pour le problème dual (pour des arrangements cristallins par exemple).

Pour démontrer leurs résultats théoriques, les auteurs de [5] ont construit une solution approchée en utilisant le fait qu'à une distance suffisamment petite de Q_0 , la projection sur celui-ci était bien définie. Si l'on interprète notre algorithme en termes de position, on a :

$$\mathbf{q}^{n+1} = P_{K(\mathbf{q}^n)}(\mathbf{q}^n + h \mathbf{U}(\mathbf{q}^n)) \\ \text{où } K(\mathbf{q}^n) = \{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{ij}(\mathbf{q}^n) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}^n) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}^n) \geq 0 \}$$

On projette en fait sur $K(\mathbf{q}^n)$ qui est une "approximation convexe intérieure" de Q_0 . Sur la figure ci-dessous, les points \mathbf{q}^{n+1} et $\tilde{\mathbf{q}}^{n+1}$ sont obtenus respectivement après projection sur $K(\mathbf{q}^n)$ et sur Q_0 de $\mathbf{q}^n + h \mathbf{U}(\mathbf{q}^n)$.



V Perspectives

★ Différencier les individus selon leur stratégie pour atteindre la sortie

★ Modèle macroscopique :

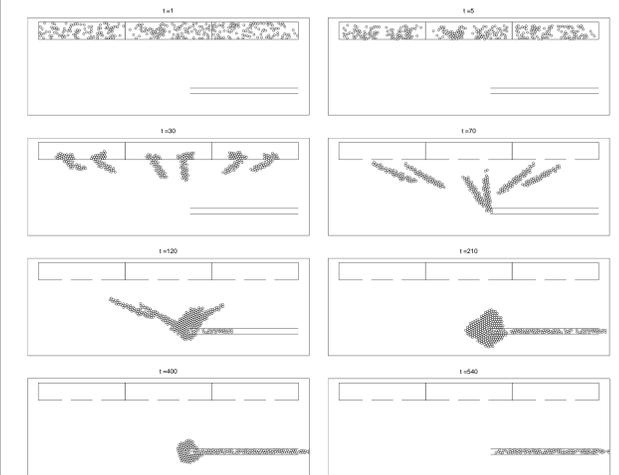
La foule est représentée par une fonction densité ρ ($0 \leq \rho \leq 1$) qui se déplace suivant le champ advectant réel \mathbf{u} . (ρ, \mathbf{u}) vérifient le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \mathbf{u} = P_C(\mathbf{U}) \end{cases}$$

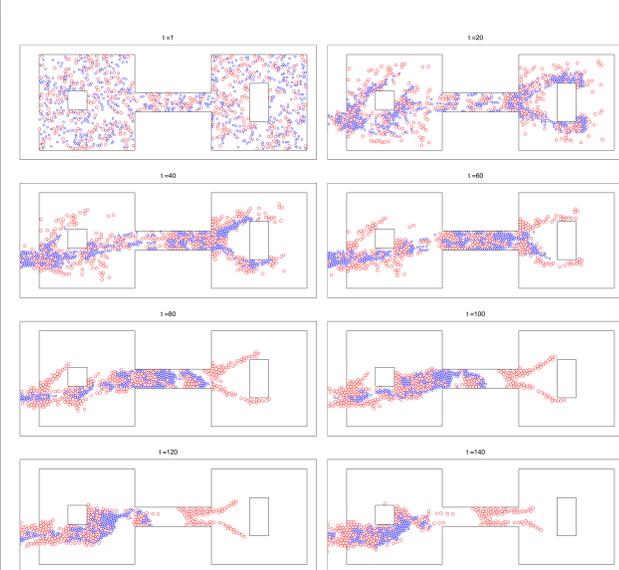
où \mathbf{U} est le champ des vitesses souhaitées et $C = \text{adhérence dans } L^2 \text{ de } \{ \mathbf{v} \in H_{div}, \nabla \cdot \mathbf{v} \geq 0 \text{ pp sur } \{ \rho = 1 \} \}$

VI Tests numériques

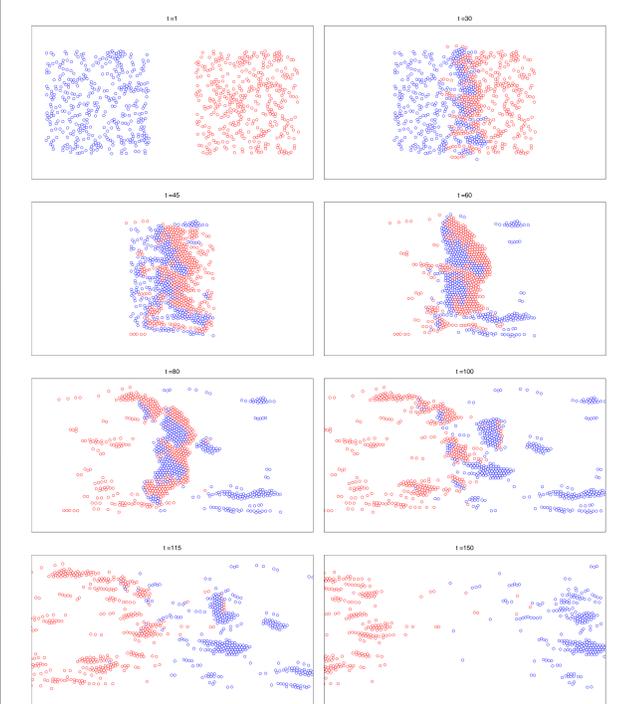
1. RER Gare du Nord : 300 personnes



2. Evacuation à deux vitesses : 1000 personnes



3. Mêlée : 800 personnes



Références

- [1] H. BREZIS, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, 1973.
- [2] G. COLOMBO, M.D.P. MONTEIRO MARQUES, *Sweeping by a continuous prox-regular set*, J. Differential Equations 187, no. 1, 46-62, 2003.
- [3] J.J. MOREAU, *Evolution Problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*, J. Differential Equations 26, no. 3, 347-374, 1977.
- [4] L. THIBAUT, *Sweeping Process with regular and nonregular sets*, J. Differential Equations 193, no. 1, 1-26, 2003.
- [5] J.F. EDMOND, L. THIBAUT, *Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process*, Math. Program 104, no. 2-3, Ser. B, 347-373, 2005.
- [6] B. MAURY, *A time-stepping scheme for inelastic collisions*, Numerische Mathematik 102, no. 4, 649-679, 2006.