Une modélisation du poumon humain par un arbre infini

CHRISTINE VANNIER[1], BERTRAND MAURY[2]

[1,2]**Laboratoire de Mathématiques** Université Paris Sud, Orsay

Arbre résistif fini

⋆ Description géométrique : un arbre dyadique à 23 générations
⋆ Equation vérifiée par l'air : Loi de Poiseuille : $P_e - P_s = Ru$

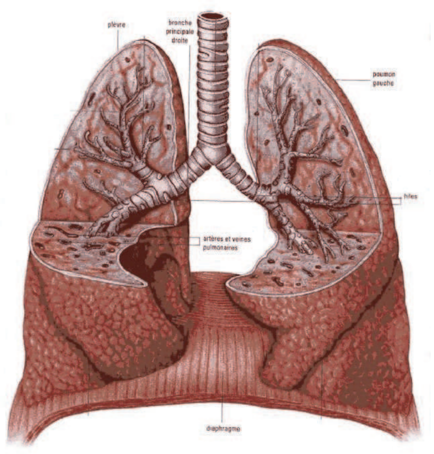


Fig. 1a : Un poumon humain

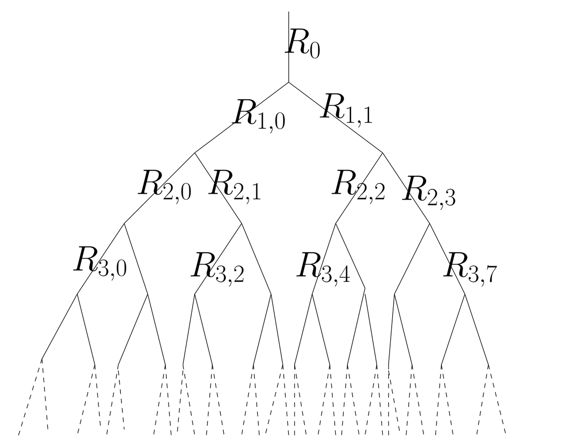


Fig. 1b : Un poumon humain modélisé

⋆ Cas d'un poumon humain sain :

$$R_{n,k} = r_0\alpha^n \quad avec \quad \alpha \sim 1.6$$

Passage à l'infini et Objectifs

On propose ici un modèle de poumon humain basé sur l'analogie entre un arbre bronchique et un arbre résistif infini.
Les objectifs sont :
⋆ donner un sens à la notion de champ de pression au niveau des alvéoles : obtenir des théorèmes de trace sur l'arbre infini.
⋆ définir un objet mathématique abstrait représentant le poumon en vue de formaliser la crise d'asthme comme perturbation d'opérateur.

Notations

1.Un arbre résistif

Arbre résistif (T,r) : ⋆ ensemble de noeuds V
⋆ ensemble d'arêtes $Y \subset V \times V$
⋆ résistances : r(x,y)=r(y,x)>0

On définit de plus :
⋆ orientation $X \subset Y$: $[x, y] \in X \Leftrightarrow [y, x] \notin X$
⋆ conductance de $[x, y]$: $c(x, y) = \dfrac{1}{r(x, y)}$
⋆ conductance de x : $c(x) = \sum_{x\sim y} c(x, y)$

2.Représentation du flux et des pressions

⋆ Flux :

$$\mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}(T) = \{u \in \mathbb{R}^Y \ / \ u(x, y) = -u(y, x) \ \ et\ \mathcal{W}(u) = \sum_{[x,y]\in X} r(x, y)u(x, y)^2 < +\infty\}$$

= ensemble des champs de puissance dissipée finie
= espace de Hilbert muni de $||U||^2 = \mathcal{W}(U)$.

⋆ Pression :

$$H^1(T) = \{p \in \mathbb{R}^V \ / \ D(p) = \sum_{[x,y]\in X} c(x, y)[p(x) - p(y)]^2 < +\infty\}$$

= ensemble des champs de puissance dissipée finie
= espace de Hilbert muni de $||p||_1^2 = \frac{1}{r_0}|p(0)|^2 + D(p)$.

$H^1_0(T)$ = complété dans $H^1(T)$ de l'ensemble des pressions à support fini.

3.Définition des opérateurs

⋆ Opérateur divergence et gradient :
Divergence : $\delta \ : \ \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^V$:

$$\forall x \in V \quad \delta u(x) = \sum_{y\sim x} u(x, y)$$

Gradient : $\delta^* \ : \ \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^Y$:

$$\forall [x, y] \in Y \quad \delta^* p([x, y]) = p(y) - p(x)$$

⋆ Lois qui gèrent l'écoulement :
Loi de Kirchoff : $\delta u = 0$
Loi de Poiseuille : $u = -c\delta^* p$

I Equations vérifiées

⋆ Equations vérifiées par le flux et la pression lors d'une inspiration unitaire :

$$(\mathcal{U}) \begin{cases} u \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{R}} \\ \partial u = \delta_0 \end{cases} \qquad (\mathcal{P}) \begin{cases} p \in H^1(T) \\ \delta c\delta^* p = -\delta_0 \end{cases}$$

Ces équations sont équivalentes à une constante près.

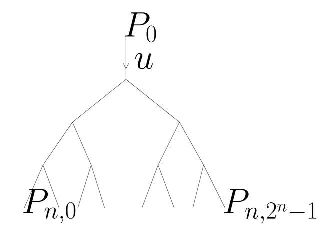
⋆ Analogie avec l'équation de Darcy dans les milieux poreux :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} u + c\delta^* p = 0 \\ \partial u = \delta_0 \end{cases} \qquad (\mathcal{D}) \begin{cases} u + k\nabla p = 0 \\ \nabla.u = \delta_0 \end{cases}$$

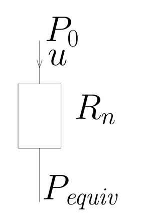
II Existence de solutions

1. Résistance équivalente à l'infini

Résistance équivalente R_n sur un arbre fini à n générations :



$\Leftrightarrow$



$(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite croissante, on pose alors :

$$R = \lim_{n\to+\infty} R_n \tag{1}$$

2. Existence de solutions

Théorème 1 *Existence de solutions* $\Leftrightarrow$ $R < +\infty$

Cas du poumon : $R < +\infty$

⋆ Idée de démonstration :
On construit une suite de pression $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, sur l'arbre fini T_n à n générations :

$$(\mathcal{P}_n) \begin{cases} Lp(0) = r_0 \\ Lp(intérieur\ de\ l'arbre\ fini) = 0 \end{cases}$$

et minimisant l'énergie.
Ceci est équivalent à prendre p_n solution définie à une constante près, de :

$$\begin{cases} p(0) = R_n \\ p(sortie) = 0 \\ Lp(intérieur\ de\ l'arbre\ fini) = 0 \end{cases}$$

Un passage à la limite permet de conclure.

⋆ Remarque : Lien avec les probabilités :
Arbre résistif = chaîne de Markov

Existence de solutions	$\Leftrightarrow$ chaîne de Markov transiente
	$\Leftrightarrow$ non existence de cycle fini
	$\Leftrightarrow$ le nombre de fois où l'on atteint un sommet y en étant parti d'un sommet x est fini

III Unicité

1. Champ de pression sur l'espace des bouts

Définition 1 *Le champ de pression sur l'espace des bouts de l'arbre infini est défini par*

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = H^1(T)/H^1_0(T)$$

Muni de la norme quotient, c'est un espace de Hilbert.

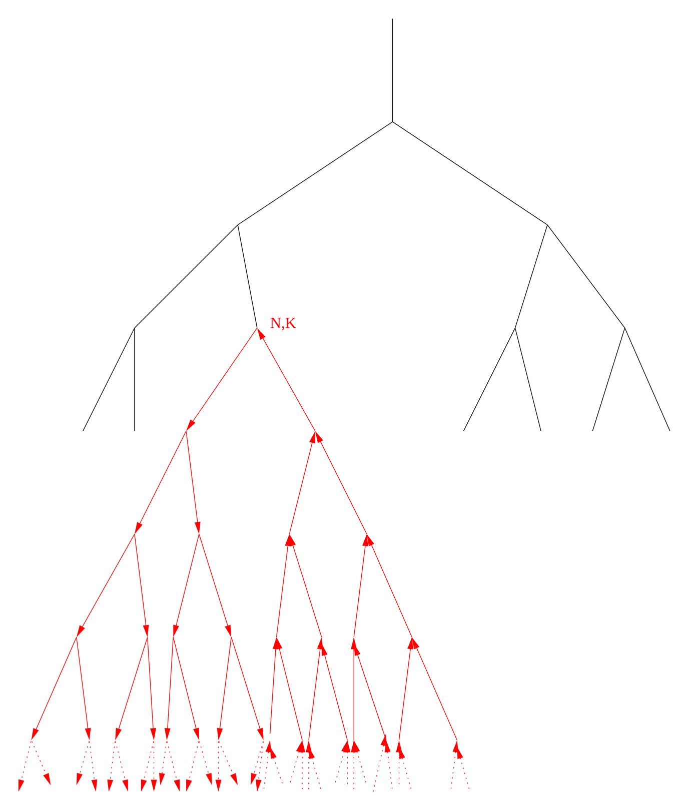
Propriété 1 *Soit (T,r) un arbre résistif tel que* $R < +\infty$.

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \sim H^1_\Delta(T)$$

avec $H^1_\Delta(T)$ *espace des pressions harmoniques.*

La construction d'une base hilbertienne de $H^1_\Delta(T)$ permet donc de caractériser $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$:

base hilbertienne de $H^1_\Delta(T)$	= pressions harmoniques associées aux cycles infinis de flux



Construction d'une base hilbertienne

2. Cas particulier du poumon en dimension 1

Propriété 2 *Soit (T,r) un arbre homogène géométrique :* $R_{n,k} = r_0\alpha^n$ *avec* $1 < \alpha < 2$ *(*$\alpha \sim 1.6$ *pour le poumon). On a alors :*

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \sim H^s([0, 1]) \quad avec \quad s = \frac{1}{2} - \frac{ln\alpha}{2ln2}$$

En particulier pour le poumon, on a $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \sim H^{0.15}([0, 1])$

En effet, la trace des champs de pression sur l'espace des bouts de l'arbre est alors, à une constante multiplicative près, identifiable à la base de Haar sur $[0, 1]$. On obtient alors le résultat en utilisant la caractérisation de certains espaces de Sobolev par la base de Haar.

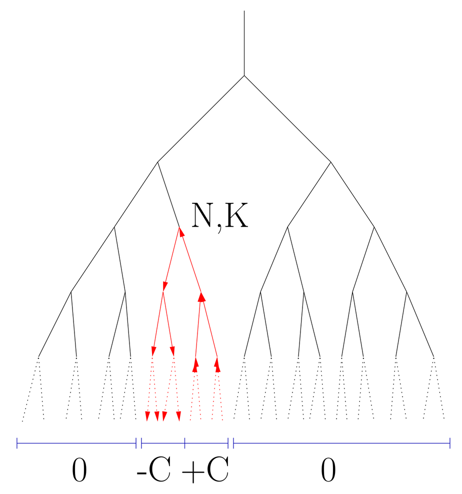


Fig. 1a : Trace

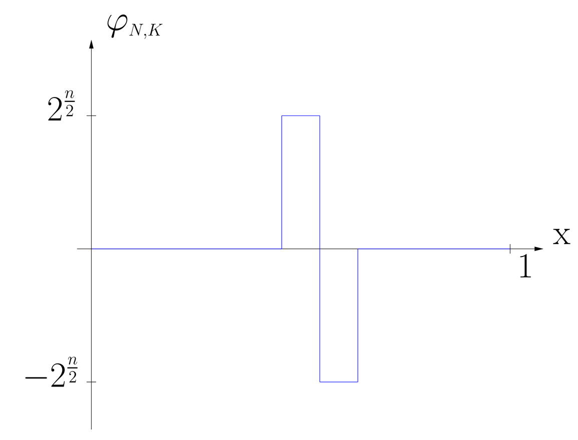


Fig. 1b : Fonction de Haar

3. Problème de Dirichlet non homogène

Pour que le problème $(\mathcal{P})$ devienne un problème bien posé, il faut imposer des conditions sur l'espace des bouts de notre arbre infini, ce qui est donc possible maintenant que l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est défini.

Théorème 2 *Il existe une unique solution au problème :*

$$(\mathcal{P}') \begin{cases} p \in H^1(T) \\ Lp = r_0\delta_0 \\ \gamma_0(p) = g \quad , g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad donnée \end{cases}$$

IV Construction de l'opérateur $\mathcal{R}$

1. Flux sur l'espace des bouts

Définition 2 *Le flux sur l'espace des bouts de l'arbre infini est défini par*

$$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = (H^1_\Delta(T))'$$

Propriété 3

$$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \sim \mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}\mathcal{H}$$

avec $\mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}\mathcal{H}$ *espace des flux harmoniques*

2. Construction

On peut alors donner un sens à l'opérateur Dirichlet-Neumann, opérateur qui à un champ de pression sur l'espace des bouts associe le flux sortant :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{R} : & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) & \to & H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ & p & \to & u \end{array} \tag{2}$$

Perspectives

⋆ $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \sim H^{0.15}([0, 1])$ en dimension 1. Que se passe-t-il en dimension 3, en plongeant le poumon dans un cube ?

⋆ Perturbation de l'opérateur $\mathcal{R}$ = une crise d'asthme peut être vue dans notre modèle comme une modification du champ des résistances.

Références

[1] C. GRANDMONT, B. MAURY, N.MEUNIER, *A viscoelastic model with a non-local dissipation term*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol. 40 No. 1, pp 201-224, 2006.

[2] B. MAUROY, M. FILOCHE, J.S. ANDRADE JR., B. SAPOVAL, *Interplay between flow distribution and geometry in an airway tree*, Phys. Rev. Lett. 90, 14, 2003.

[3] P. OSWALD, *On N-term approximation by Haar functions in H^s-norms*, Metric Function Theory and Related Topics in Analysis, AFC, Moscow, 1999, pp 137-163.

[4] P. M. SOARDI, *Potential Theory on Infinite Networks*, Springer-Verlag, 1994.