Réduction variationnelle d'un problème fluide-structure

Application à l'écoulement sanguin

Nicole Poussineau

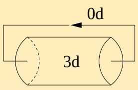
nicole.poussineau@ann.jussieu.fr

Laboratoire Jacques-Louis Lions, UMR 7598 - Université Paris VI & CNRS

La simulation de la circulation sanguine est très complexe à cause des nombreuses interactions entre toutes les parties du corps. On utilise généralement un modèle fluide-structure en trois dimensions dans la région d'intérêt et des modèles réduits ailleurs.

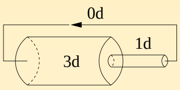
Approches classiques

- **Couplage 3d-0d**
  Le modèle réduit 0d ne dépend pas des variables d'espace. Il modélise généralement les vaisseaux et le cœur en dehors de la région d'intérêt.



Problème : Le couplage 3d-0d engendre une onde de réflexion en sortie du modèle 3d car le rayon en sortie du modèle 3d doit être fixé.

- **Couplage 3d-1d-0d**
  On introduit un modèle de transport 1d entre les modèles 3d et 0d qui dépend de la variable d'espace z selon l'axe du vaisseau.



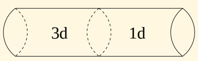
Réf. : Formaggia, Gerbeau, Nobile, Quarteroni, 2001

Problèmes

- Le couplage est fort : les grandeurs sont imposées fortement à l'interface.
- Les modélisations sont différentes : il est difficile d'étudier le modèle complet 3d-1d.
- Le modèle 1d est limité au cas d'un tube droit.

Réduction variationnelle du fluide

- **Idées**
  - On souhaite utiliser la même modélisation pour les parties 3d (Ω_3) et 1d (Ω_1) pour maîtriser l'erreur.
  - La réduction 1d est obtenue en restreignant l'espace fonctionnel contenant les solutions.



- **Équations complètes : Navier-Stokes**
  Trouver $(u,p) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tels que $\forall (v,q) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

$$\begin{cases} a(u,v) + b(v,p) = \int fv \\ b(u,q) = 0 \end{cases}$$

- **Équations réduites**
  Trouver $(\tilde{u},\tilde{p}) \in V \times W$ tels que $\forall (\tilde{v},\tilde{q}) \in V \times W$

$$\begin{cases} a(\tilde{u},\tilde{v}) + b(\tilde{v},\tilde{p}) = \int f\tilde{v} \\ b(\tilde{u},\tilde{q}) = 0 \end{cases}$$

où $V = \{\tilde{u} \in H^1(\Omega);$
$\forall (x,y,z) \in \Omega_1, \tilde{u}(x,y,z) = \phi(x,y)\psi(z)\}$
et $W = \{\tilde{p} \in L^2(\Omega);$
$\forall (x,y,z) \in \Omega_1, \tilde{p}(x,y,z) = \eta(x,y)q(z)\}$

Choix du modèle réduit

- **Écoulement de Poiseuille**
  Pour avoir un écoulement de Poiseuille dans la partie réduite, on prend

$$\phi(x,y) = \begin{pmatrix} x/R \\ y/R \\ 1 - \dfrac{(x^2+y^2)}{R^2} \end{pmatrix} \text{ avec } R \text{ rayon,}$$

$$\eta(x,y) = 1.$$

- **Modèles plus riches**
  On pose

$$\phi(x,y) = \sum a_i \phi_i(x,y),$$
$$\eta(x,y) = \sum b_i \eta_i(x,y).$$

Les fonctions ϕ_i et η_i forment une base de l'espace des fonctions admissibles dans le type d'écoulement choisi.

Il est ainsi possible de considérer un écoulement dans un tube courbe, avec une variation de diamètre...

Discrétisation

Il y a deux méthodes possibles de discrétisation. La première exploite l'idée de réduction (diminution de la taille des inconnues), la seconde est une réécriture pour obtenir l'efficacité maximum de la résolution numérique.

- **Projection**
  - On discrétise les équations non-réduites sur l'ensemble du domaine Ω par une méthode d'éléments finis. On obtient un système linéaire $AU = b$.
  - On note $\tilde{U}$ le vecteur des composantes 3d sur Ω_3 et 1d sur Ω_1, R la matrice telle que $U = R^t\tilde{U}$.
  - La discrétisation du modèle réduit est $\tilde{A}\tilde{U} = Rb$, avec $\tilde{A} = RAR^t$.
- **Décomposition de domaine**
  On peut réécrire le problème sous forme d'un couplage de deux systèmes. On a alors un couplage faible à l'interface entre le modèle 3d normal et le modèle 1d obtenu par réduction.

Structure

La structure peut être traitée en trois dimensions ou réduite.

- **Modèle complet**
  Les variables du modèle fluide réduit nous permettent de reconstruire les inconnues de vitesse et de pression en trois dimensions. On peut alors coupler le fluide reconstruit avec une structure non-réduite.
- **Réduction**
  - On peut faire une réduction variationnelle en appliquant les mêmes hypothèses (axisymétrie...) que pour le fluide.
  - On peut aussi utiliser une réduction classique qui donne la pression comme une fonction du rayon.

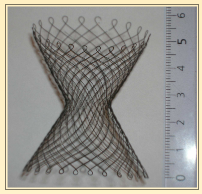
  Dans ce cas, le couplage fluide-structure se fait avec le modèle de fluide réduit.

Apports de la méthode

- **Condition de sortie**
  Le couplage 3d-1d permet de simuler une sortie libre pour un écoulement fluide-structure 3d. On évite ainsi l'onde de réflexion.
- **Modèles 1d enrichis**
  Notre méthode nous permet d'obtenir une hiérarchie de modèles avec la richesse souhaitée, simplement en modifiant les espaces variationnels réduits V et W.
- **Estimations d'erreur**
  Comme nous utilisons un seul modèle, il est possible d'écrire des estimations d'erreur pour le système complet 3d-1d.

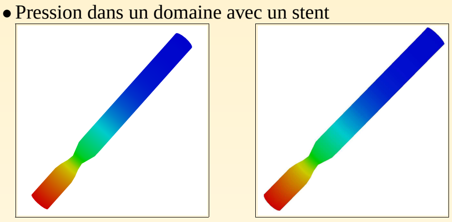
Résultats numériques

On réalise une simulation d'une artère comprenant un **stent**, dispositif visant à réduire le diamètre de l'artère.



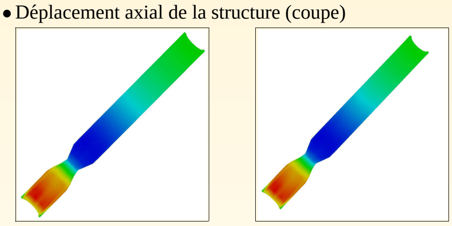
Ce cas intéresse les médecins dans certaines pathologies cardiaques. Le modèle est réduit suivant un profil de Poiseuille dans la deuxième moitié du domaine.

- Pression dans un domaine avec un stent



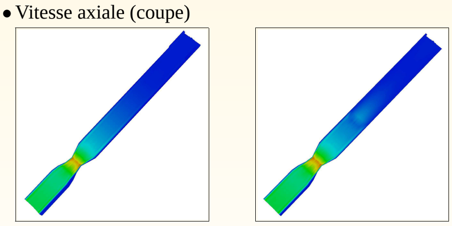
Modèle non-réduit — Modèle 3d-1d

- Déplacement axial de la structure (coupe)



Modèle non-réduit — Modèle 3d-1d

- Vitesse axiale (coupe)



Modèle non-réduit — Modèle 3d-1d

Le profil parabolique imposé apparaît nettement dans la partie réduite, mais aucune perturbation n'est visible dans la partie non-réduite.