

Traitement des contacts unilatéraux sans frottements en grandes déformations

Olivier Pantz

Centre de Mathématiques Appliquées
École Polytechnique

www.cmap.polytechnique.fr/~pantz

1. Position du problème

On considère une famille de solides $M = (M_i)$ et une fonctionnelle J qui à toute déformation ψ de M associe une énergie $J(\psi)$. On cherche à déterminer le minimum de J sur l'ensemble des déformations sans auto-intersection.

2. Quel sens donner à la contrainte de non auto-intersection ?

2.1 Formulation maître/esclave

Supposons que M est constitué de deux solides M_1 et M_2 se déplaçant dans \mathbb{R}^n et que $\dim(M_1) = \dim(M_2) = n$. Pour tout $x \in M_2$, on pose

$$g_\psi(x) = \begin{cases} \text{dist}(\psi(x), \psi(\partial M_1)) & \text{si } \psi(x) \notin \psi(M_1) \\ -\text{dist}(\psi(x), \psi(\partial M_1)) & \text{si } \psi(x) \in \psi(M_1) \end{cases}$$

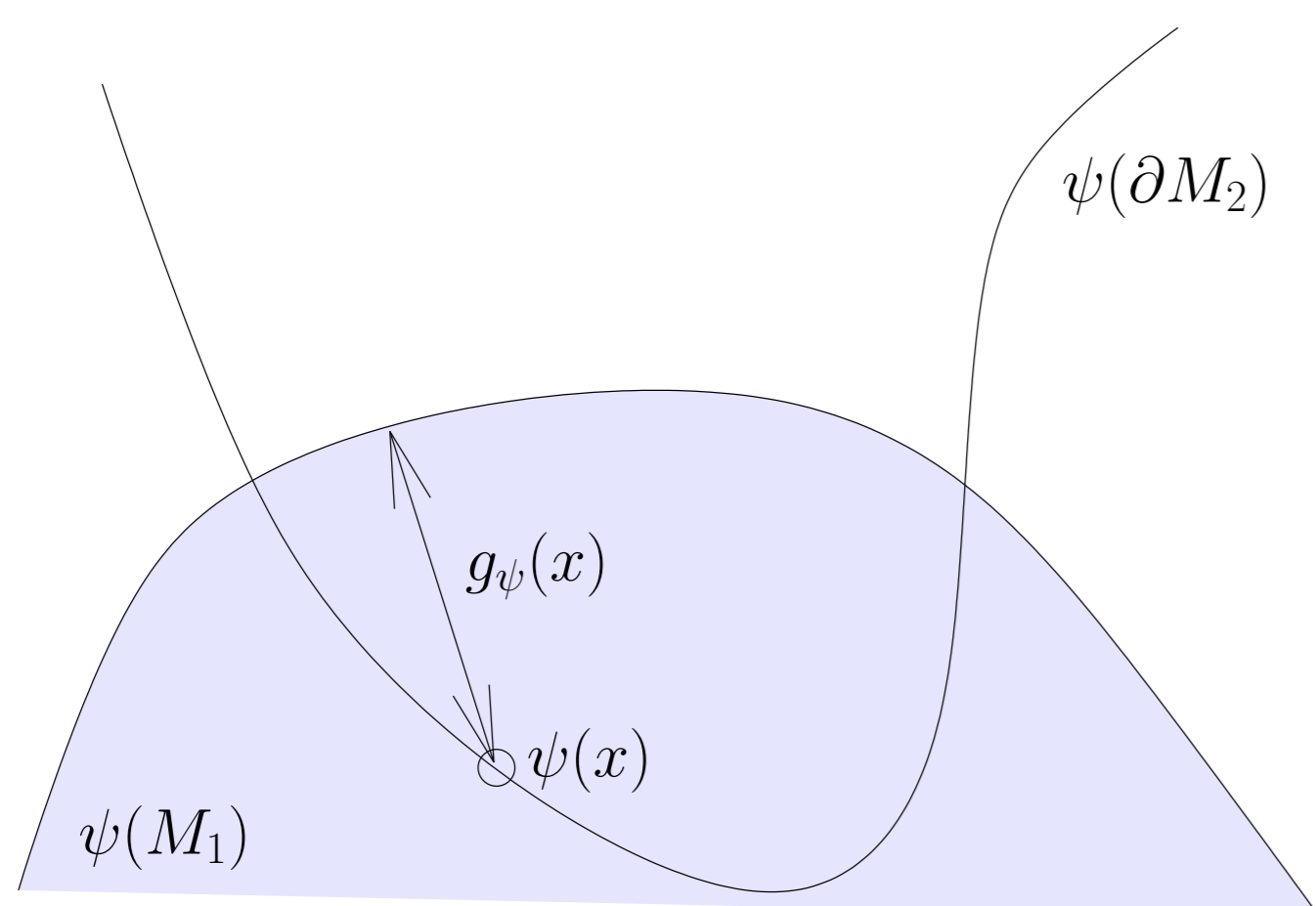


Figure 1: Définition de la fonction gap

Définition de la contrainte

$$g_\psi(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \partial M_2.$$

M_1 = Solide maître, M_2 = Solide esclave.

Problèmes liés à la formulation maître/esclave

- Certaines déformations satisfaisant les contraintes présentent des intersections.
- Comment traiter les structures minces ($\dim(M) < n$) ou les auto-contacts ?
- La fonction gap g n'est pas dérivable, ce qui engendre des difficultés numériques (phénomène de "chatter").

2.2 Une formulation alternative

Un plongement de M dans \mathbb{R}^n est une application régulière injective de M dans \mathbb{R}^n dont le gradient est partout de rang maximal. On note $\text{Plon}(M; \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des plongements de M dans \mathbb{R}^n et nous définissons l'ensemble des déformations admissibles comme étant l'adhérence des plongements (pour une topologie dépendant de J),

$$\mathcal{A}(M) = \overline{\text{Plon}(M; \mathbb{R}^n)}.$$

Notre problème consiste donc à déterminer $\varphi \in \mathcal{A}(M)$ tel que

$$J(\varphi) := \inf_{\psi \in \mathcal{A}(M)} J(\psi). \quad (1)$$

3. Minimisation sur un espace non convexe

L'algorithme de minimisation proposé est défini par la procédure récursive suivante.

1. Initialisation de φ_0 par une déformation admissible.
2. Pour tout $n \geq 0$, on note $\varphi_{n+1} \in T(\varphi_n)$, solution du problème de minimisation

$$J(\varphi_{n+1}) := \inf_{\psi \in T(\varphi_n)} J(\psi),$$

où $\psi \in T(\varphi)$, $T(\varphi) \subset \mathcal{A}(M)$, $T(\varphi)$ convexe. On stoppe l'algorithme dès qu'un point fixe est atteint.

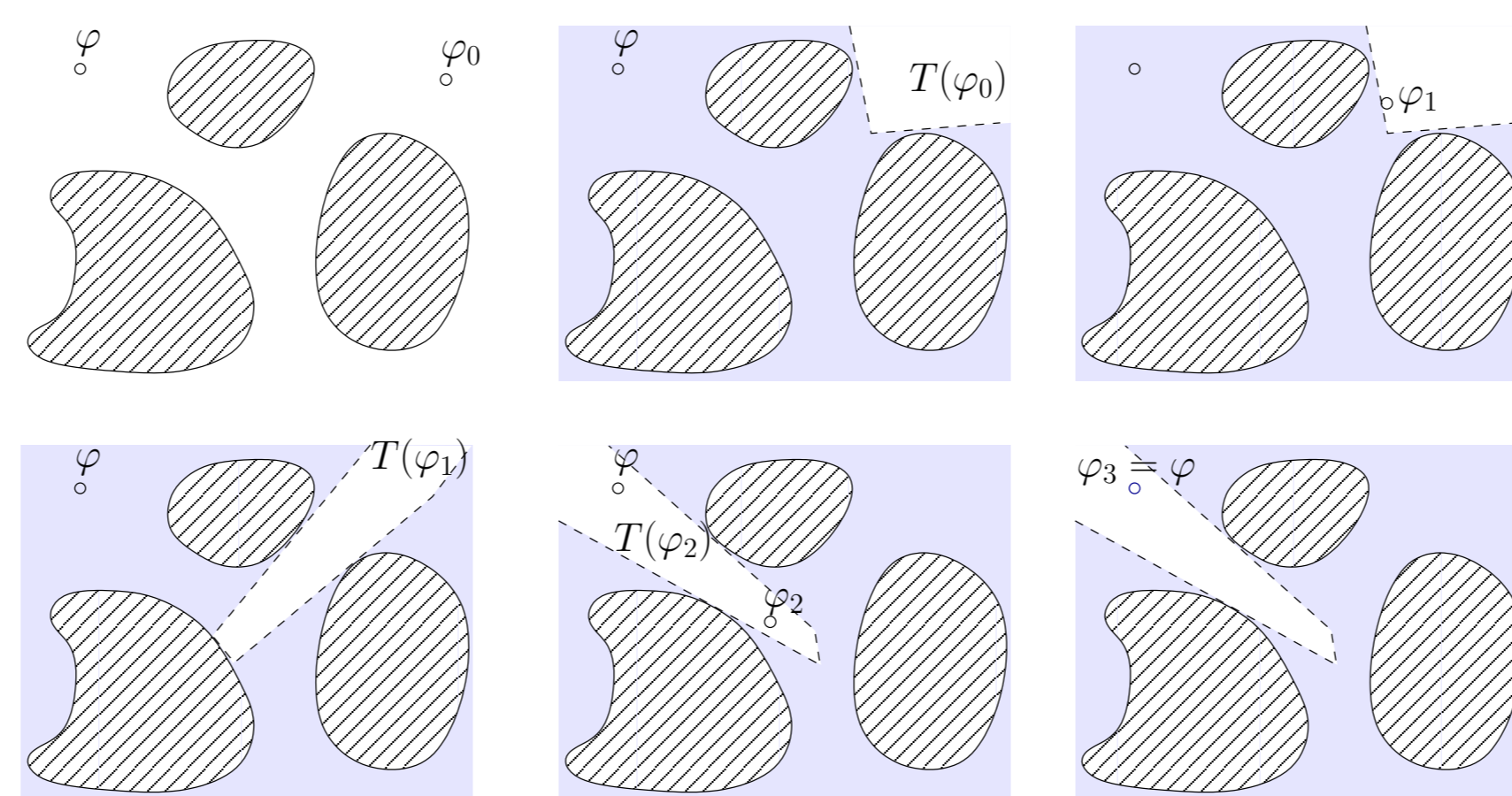


Figure 2: Étapes de l'algorithme de minimisation

4. Discrétisation du problème

On note X_h l'espace des éléments finis de Lagrange P1 associé à un maillage \mathcal{T}_h et on note

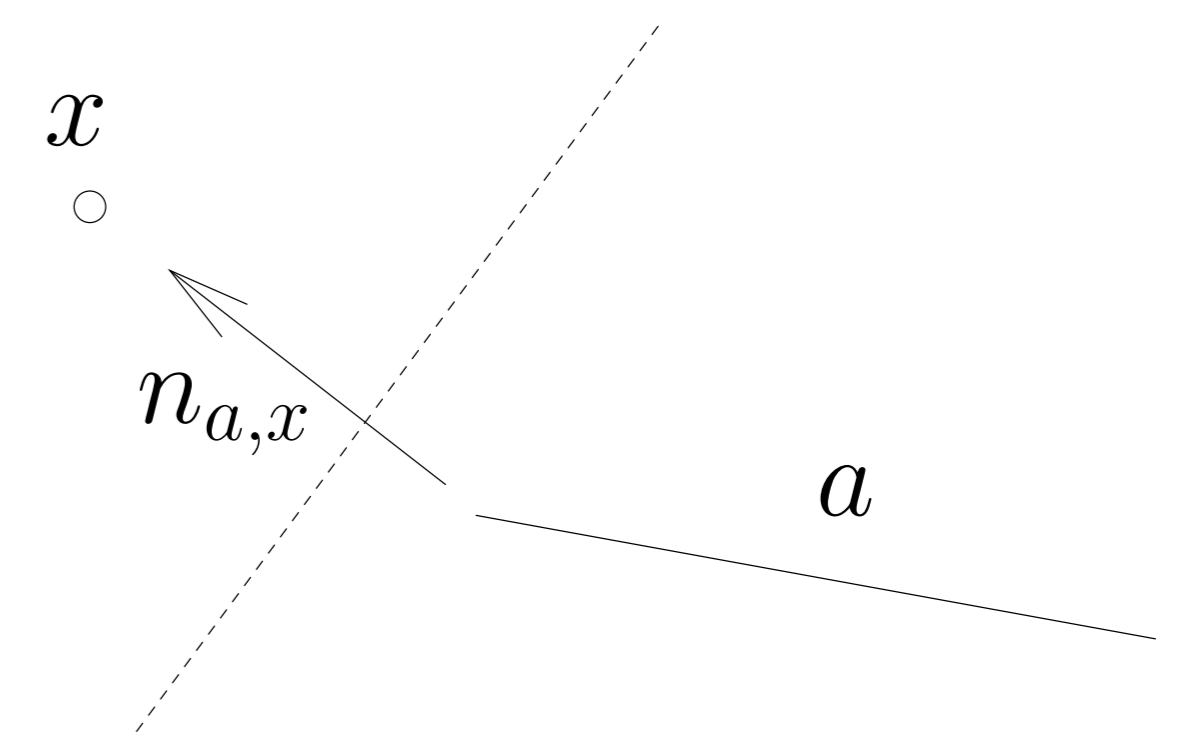
$$\mathcal{A}_{h,\varepsilon} = \left\{ \psi_h \in X_h : \text{dist}(\psi_h(T_1), \psi_h(T_2)) \geq \varepsilon, \right. \\ \left. \text{pour tout } T_1 \text{ et } T_2 \in \mathcal{T}_h, \text{ tel que } T_1 \cap T_2 = \emptyset \right\}.$$

On applique l'algorithme 3 à la minimisation de J sur $\mathcal{A}_{h,\varepsilon}$. Dans le cas bidimensionnel, on pose

$$T(\psi_h) = \left\{ \varphi_h \in X_h : n_{a,x}(\psi_h) \cdot (\varphi_h(a) - \varphi_h(x)) \geq \varepsilon, \right. \\ \left. \text{pour toute arête } a \text{ et tout nœud } x \text{ de } \mathcal{T}_h \text{ tels que } x \notin a \right\}.$$

où $n_{a,x}(\psi_h)$ est défini pour toute arête a et tout nœud x du maillage tels que $x \notin a$ par

$$\min_{x_a \in a} n_{a,x}(\psi_h) \cdot (\psi_h(x_a) - \psi_h(x)) = \text{dist}(\psi_h(a), \psi_h(x)) \geq \varepsilon. \quad (2)$$



Dans le cas tridimensionnel, la définition est un peu plus complexe: on doit associer une contrainte d'une part à tout couple triangle/nœud et d'autre part à tout couple arête/arête. Ainsi, on pose

$$T(\psi_h) = \left\{ \varphi_h \in X_h : n_{a,b}(\psi_h) \cdot (\varphi_h(a) - \varphi_h(b)) \geq \varepsilon, \right. \\ \left. \text{pour toutes arêtes } a \text{ et } b \text{ de } \mathcal{T}_h \text{ telles que } a \cap b = \emptyset, \right. \\ \left. n_{T,x}(\psi_h) \cdot (\varphi_h(T) - \varphi_h(x)) \geq \varepsilon, \right. \\ \left. \text{pour tout triangle } T \text{ et tout nœud } x \text{ de } \mathcal{T}_h \text{ tels que } x \notin T \right\},$$

où

$$\min_{(x_a, x_b) \in a \times b} n_{a,b}(\psi_h) \cdot (\psi_h(x_a) - \psi_h(x_b)) = \text{dist}(\psi_h(a), \psi_h(b))$$

et

$$\min_{x_T \in T} n_{T,x}(\psi_h) \cdot (\psi_h(x_T) - \psi_h(x)) = \text{dist}(\psi_h(T), \psi_h(x)).$$

5. Conditions d'optimalité

Tout point fixe de l'algorithme 3 vérifie les conditions d'optimalité associées au problème de minimisation de J sur $\mathcal{A}_{h,\varepsilon}$ à l'ordre h .

6. Un exemple d'application

On considère une famille de membranes élastiques M_i (dans \mathbb{R}^2) de densité d'énergie

$$W(F) = \max(|F|^2 - 1, 0)^2,$$

fixées à un support, contenant un gaz rare. On minimise l'énergie totale du système

$$J(\varphi) = \sum_i \int_{M_i} W(\dot{\varphi}_i) dx - C_i \ln(V_i),$$

où φ_i est la déformation de la membrane M_i et V_i le volume délimité par celle-ci. La figure ci-dessus, représente différentes étapes de l'algorithme d'optimisation pour un système constitué de quatre membranes.

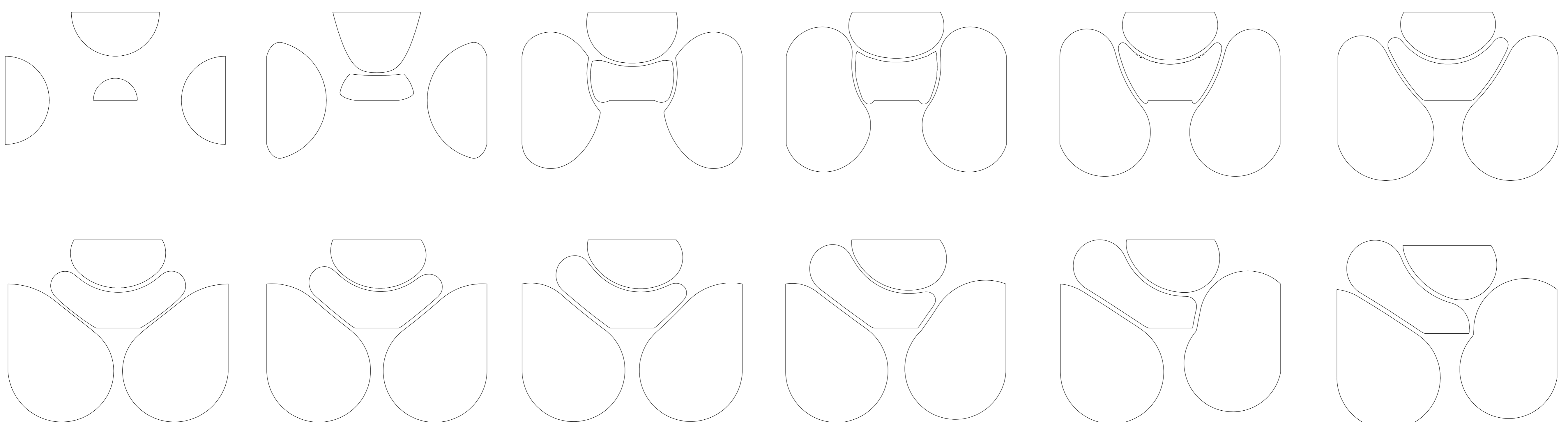


Figure 3: Étapes de la minimisation de l'énergie de membranes élastiques, fixées sur une base et contenant un gaz rare