

# MÉTRIQUES CONTINUES ADAPTATION DE MAILLAGES

LOSEILLE ADRIEN · ALAUZET FRÉDÉRIC · DERVIEUX ALAIN

**MOTS CLÉS :** Métriques continues, adaptation de maillages, maillage anisotrope, ordre de convergence, mécanique des fluides, équations d'Euler.

## MOTIVATIONS

L'adaptation de maillages non structurés permet de :

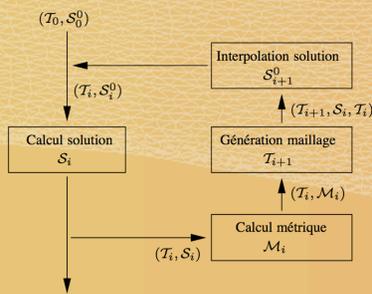
1. Détecter automatiquement l'anisotropie naturelle des phénomènes physiques étudiés  
⇒ Maillage **compatible** avec les phénomènes physiques.
2. Diminuer l'erreur à nombre de points fixé.  
ou  
3. Réduire le nombre de points à erreur fixée.  
⇒ Simulation **précise** en géométrie complexe accessible sur des stations de travail.

## PRINCIPES

**Idee et concept de base.** Modifier la discrétisation du domaine  $\Omega$  itérativement afin de contrôler la précision de la solution et de converger vers un point fixe maillage/solution.

- Adapter  $\Leftrightarrow$  Prescrire des tailles de maille  $h$  et des directions en chaque point du maillage.
- Ou encore, si on se place dans un espace métrique adéquat :
- Adapter  $\Leftrightarrow$  Construire un maillage avec des éléments réguliers dont les arêtes sont de longueur 1 dans la métrique  $\mathcal{M}(\Omega)$ .

**Mise en œuvre.**  $(\mathcal{T}_i^0, \mathcal{S}_i^0)$  : Couple maillage/solution initiale.



## MÉTRIQUES CONTINUES

**Idees.**

- Interpréter le champ de métriques discrètes comme un champ continu. Une métrique continue  $\mathcal{M}$  est une fonctionnelle qui associe à tout point du domaine sa métrique.
- Considérer comme équivalents les maillages unités dans  $\mathcal{M}$  et considérer la métrique continue comme leur représentant.

**Objectifs.**

- Modéliser l'erreur d'interpolation  $e_{\mathcal{M}}$  sur un maillage  $\mathcal{H}$ , unité dans  $\mathcal{M}$ .
- Faire un calcul de variation pour trouver la métrique qui minimise l'erreur d'interpolation en norme  $L^p$  :

$$\min_{\mathcal{M}} \int_{\Omega} |e_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})|^p dx.$$

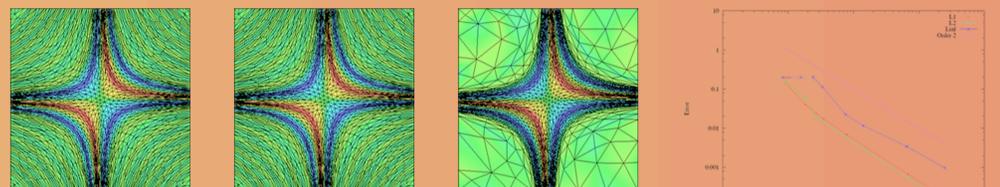
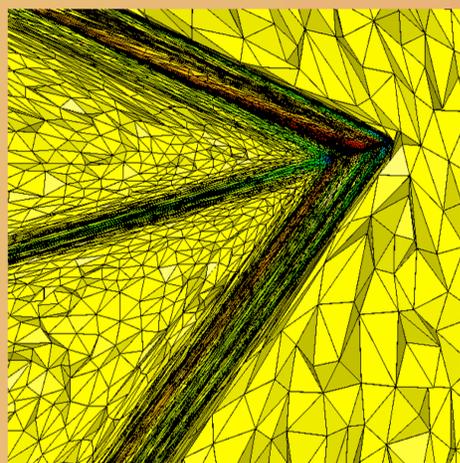
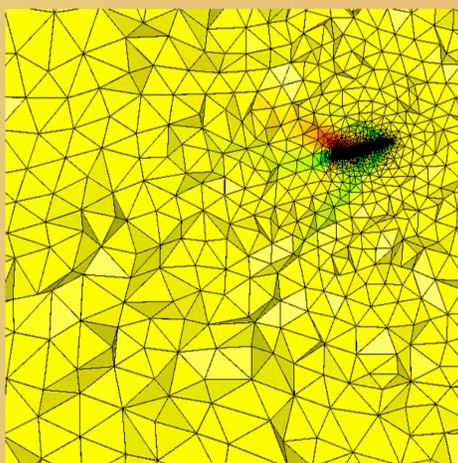
**EXEMPLE 1.** Adaptation en normes  $L^1$ ,  $L^2$  et  $L^\infty$  sur la fonction analytique  $f$  donnée par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.1 \sin(50xy) & \text{si } xy \leq -\pi/50 \\ \sin(50xy) & \text{si } -\pi/50 < xy \leq \pi/50 \\ 0.1 \sin(50xy) & \text{si } 2\pi/50 < xy \end{cases}$$

⇒ Convergence en maillages : ordre 2.  $L^\infty$  ne capte pas les petites variations de  $f$ .

**EXEMPLE 2.** Adaptation en norme  $L^1$  du nombre de mach pour un écoulement en régime supersonique autour d'un avion. **Paramètres :** mach 1.6, angle d'attaque 3 degrés, longueur de l'avion 36m, boîte englobante 1Km de diamètre.  
⇒ Choc et maillage propagés jusqu'aux bord du domaine de calcul.

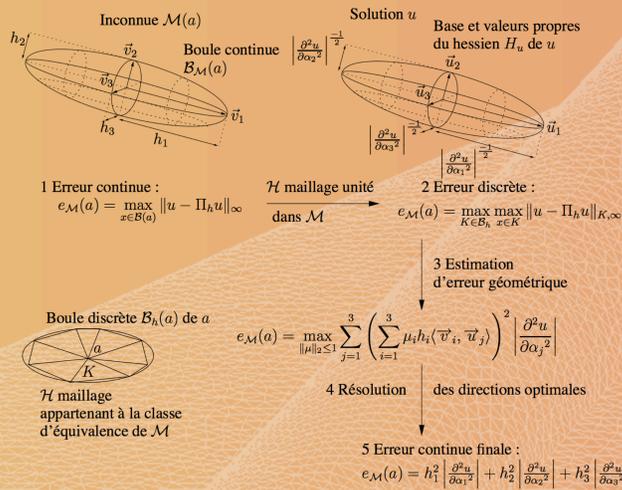
Détail de la solution convergée sur le maillage initial comportant 150000 points, détail de la solution convergée sur le maillage adapté  $L^1$  à 300000 points, isovaleurs du mach, cônes de mach sous l'avion.



Surface initiale, maillage en norme  $L^1$ ,  $L^2$ , et  $L^\infty$ , courbe de convergence. Nombre de nœuds : 3800.

## MODÉLISATION

**1. Optimisation locale.** Trouver l'erreur locale  $e_{\mathcal{M}}$  ainsi que les directions optimales de la métrique.



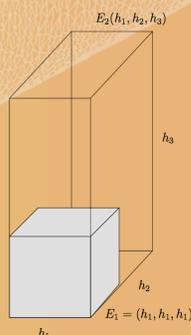
⇒ Les directions optimales sont celles du hessien de la solution  $u$ .

**2. Calcul de Variation globale.** Trouver la métrique optimale  $\mathcal{M}$ , avec  $N$  points fixés, solution de :

$$\min_{\mathcal{M}} \mathcal{E}(\mathcal{M}) = \int \left( h_1^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} \right| + h_2^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} \right| + h_3^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_3^2} \right| \right)^p, \quad (1)$$

sous la contrainte  $C(\mathcal{M}) = \int (h_1 h_2 h_3)^{-1} = N$ . La résolution utilise la définition de quotients d'anisotropie 3d, qui étendent la notion de rapport d'anisotropie 2d classique.

Trois quotients d'anisotropie :



$$r_1 = \left( \frac{\text{Vol}(E_1)}{\text{Vol}(E_2)} \right)^{1/3} = \left( \frac{h_1^3}{h_1 h_2 h_3} \right)^{1/3}$$

$$r_2 = \left( \frac{h_2^3}{h_1 h_2 h_3} \right)^{1/3}$$

$$r_3 = \left( \frac{h_3^3}{h_1 h_2 h_3} \right)^{1/3}$$

• Homogènes à un rapport de distance.

• Définissent le changement de variables :

$$(h_1, h_2, h_3) \mapsto (r_1, r_2, d = \frac{1}{h_1 h_2 h_3})$$

La résolution effective découle de la condition d'Euler-Lagrange qui lie la variation de la fonctionnelle d'erreur  $\mathcal{E}$  à la variation de la contrainte  $C$ , linéaire en  $d$ , qui impose le nombre de points. On a :

Quotients optimaux  $r_i = \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} \right|^{-1/2} (\det |H_u|)^{1/2n}$   
Densité optimale  $d = N \left( \int_{\Omega} |\det(H_u)|^{2p/n} \right)^{-1} |\det(H_u)|^{p/(2p+n)}$   
Erreur à l'optimum  $\mathcal{E}^1(\mathcal{M}) = n N^{-2/n} \left( \int_{\Omega} |\det(H_u)|^{2p/n} \right)^{2p/n}$   
⇒ Convergence à l'ordre 2 en maillages.

## MÉTRIQUES OPTIMALES

La métrique optimale s'écrit :

$$\mathcal{M}_{L^p} = D_{L^p} \mathcal{R}_u^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \mathcal{R}_u,$$

où  $D_{L^p}$  et  $\lambda_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  sont donnés par :

Norme	$D_{L^p}$	$\lambda_i$
$L^p$	$N^{2/3} \left( \int_{\Omega} \prod_{i=1}^3 \left  \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} \right ^{2p/3} \right)^{-2/3}$	$\left  \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} \right  \left( \prod_{i=1}^3 \left  \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} \right  \right)^{-1/2p+3}$

On peut réécrire les métriques continues :

$$\mathcal{M}_{L^p} = D_{L^p} (\det |H_u|)^{-1/(2p+3)} \mathcal{R}_u^{-1} |\Lambda| \mathcal{R}_u.$$

Le déterminant  $\det |H_u|$  agit comme une mise à l'échelle locale. 0.5cm

## CONCLUSIONS

- Analyse de la convergence en maillages ⇒ **Ordre 2**,
- Adaptation en norme  $L^p$
- ⇒ **Adaptation** sur toutes les échelles de la solution.

## RÉFÉRENCES

- [1] Francois Courty, David Leservoisier, Paul-Louis George, Alain Dervieux, *Continuous metrics and mesh adaptation*, Applied numerical mathematics, 2003.
- [2] Weizhang Huang, *Metric tensors for anisotropic mesh generation*, Journal of computational physics, 2004.
- [3] Pascal-Jean Frey, Frédéric Alauzet, *Anisotropic mesh adaptation for CFD computation*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 2004.

## LOGICIELS UTILISÉS

- GHS3D Mailleur 3d contraint. [George, INRIA-Gamma]
- YAMS Remaillieur de surfaces. [Frey, PARIS 6-LJLL]
- MMG3D Remaillieur local anisotrope 3d. [Frey, PARIS 6-LJLL]
- MEDIT Visualisation de maillages. [Frey, PARIS 6-LJLL]
- WOLF Solveur Euler 3d. [Alauzet, INRIA-Gamma]
- METRIX Calcul de métriques. [Alauzet, INRIA-Gamma]