Lois de conservations scalaires à flux discontinu

Julien JIMENEZ

Université de Pau et des Pays de l'Adour

Laboratoire de Mathématiques Appliquées UMR-CNRS 5142

1. PROBLEME CONSIDERE:

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$, et T un réel strictement positif. On pose $Q=]0,T[\times\Omega$

Trouver $u\in L^\infty(Q)$ *tel que*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(k(x)g(u))=0 && dans\ Q \\ &u(0,x)=u_0(x) && sur\ \Omega \\ &u=0 && sur\ ]0,T[\times\partial\Omega \end{aligned} \qquad (1)$$

Objectifs:

1) Donner la définition d'une solution faible entropique
2) Etablir l'existence et l'unicité de cette solution

2. HYPOTHESES GENERALES

- k **discontinue le long de {*x* = 0},**
- **(Hk1)** $L\{x\in\Omega\ ,\ k(x)=0\ \}=0$.
- g fonction lipschitzienne , k est $W^{1,+\infty}$ sur]-1,0[et]0,1[
- **(Hg1):** ***g*** **change au plus une fois de monotonie,**
- $u_0\in L^\infty(\Omega)$ $u_0\ \in[m,M]$

Notations:

$$k_L=\lim_{x\to0,\ x<0}k(x) \quad et \quad k_R=\lim_{x\to0,\ x>0}k(x)$$

$$\Phi(u,\kappa)=sgn(u-k)(g(u)-g(\kappa))$$

3. EXISTENCE de TRACES FORTES

HYPOTHESES: u solution entropique du problème (1)

(Hg2) $pour\ tout\ (\alpha,\beta)\neq(0,0),\ pour\ p.t.\ x\ de\ [-1,1],$
$L(\{\lambda,\ \alpha+\beta k(x)g'(\lambda)=0\ \})=0.$

RESULTAT: existence de 2 fonctions $u_1^\tau,\ u_{-1}^\tau\in L^\infty(]0,T[)$ telles que:

$$ess\lim_{x\to1}\int_K|u(t,x)-u_1^\tau(t)|dt=0 \quad et \quad ess\lim_{x\to-1}\int_K|u(t,x)-u_{-1}^\tau(t)|dt=0$$

REMARQUE: existence de deux traces fortes $\gamma u^+,\gamma u^-\in L^\infty(]0,T[)$ respectivement droite et à gauche le long de *{x = 0}*.

4. DEFINITION d'une SOLUTION ENTROPIQUE

(i) $u\in L^\infty(Q)$

(ii) $\forall\kappa\in\mathbb{R},\ \forall\varphi\in C_c^\infty([0,T[\times\Omega),\ \varphi\geq0,$

$$\begin{aligned} &\iint_Q(|u(t,x)-\kappa|\varphi_t(t,x)+k(x)\Phi(u,\kappa)\varphi_x(t,x))dxdt \\ &\quad-\iint_Q k'(x)sgn(u-\kappa)g(\kappa)\varphi\,dxdt \\ &\quad+\int_\Omega|u_0-\kappa|\varphi(0,x)dx+|(k_L-k_R)g(\kappa)|\int_0^T\varphi(t,0)dt \ \geq\ 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

(iii) $Pour\ p.t.\ t\ de\ ]0,T[,\ pour\ tout\ réel\ \kappa,$

$$\begin{aligned} &k(1)(sgn(u_1^\tau(t)-\kappa)+sgn(\kappa))(g(u_1^\tau(t))-g(\kappa))\geq0 \\ &k(-1)(sgn(u_{-1}^\tau(t)-\kappa)+sgn(\kappa))(g(u_{-1}^\tau(t))-g(\kappa))\geq0 \end{aligned} \qquad (3)$$

5. CONDITION à l'INTERFACE

PROPRIETE: De l'étude de l'inégalité (2) on déduit: $\forall\ \kappa\in\mathbb{R}$

$$k_L\Phi(\gamma u^-,\kappa)-k_R\Phi(\gamma u^+,\kappa)+|(k_L-k_R)g(\kappa)|\ \geq0 \qquad (4)$$

HYPOTHESE **(H1)**: $\exists\kappa_1\in\mathbb{R},\kappa_1\geq ess\sup u,\ g(\kappa_1)(k_L-k_R)\leq0$
$\exists\kappa_2\in\mathbb{R},\kappa_2\leq ess\inf u,\ g(\kappa_2)(k_L-k_R)\geq0$

LEMME: Sous **(H1),** la condition de Rankine-Hugoniot est satisfaite:

$$k_Lg(\gamma u^-(t))=k_Rg(\gamma u^+(t))$$

6. UNICITE de la SOLUTION ENTROPIQUE

THEOREME: Sous l'hypothèse **(H1)**, si u et v sont deux solutions entropiques, de conditions initiales $u_0\ et\ v_0$, alors:

$$\iint_Q|u(t,x)-v(t,x)|dxdt\ \leq\ T\int_\Omega|u_0-v_0|dx$$

PREUVE:

- Pour tout $\varphi\in C_c^\infty([0,T[\times\Omega),\ \varphi\geq0,$ **s'annulant sur un voisinage de {*x* = 0}**,

$$I=\iint_Q(|u-v|\varphi_t+k(x)\Phi(u-v)\varphi_x)dxdt+\int_\Omega|u_0-v_0|\varphi(0,x)dx\ \geq\ 0$$

- Pour tout $\varphi\in C_c^\infty([0,T[\times\Omega),\ \varphi\geq0,$ **quelconque,**

$$I\ \geq\ J=\int_0^T(k_L\Phi(\gamma u^-,\gamma v^-)-k_R\Phi(\gamma u^+,\gamma v^+))\varphi(t,0)dt$$

- En utilisant **(H1)**, **(Hg1)**, (4), on montre que:

$J\ \geq\ 0$ donc $I\ \geq\ 0$

- Conclusion: choix d'une fonction-test particulière + conditions de bord (3)

7. EXISTENCE de la SOLUTION ENTROPIQUE

HYPOTHESE **(H2)**: $g(m)=g(M)=0$

HYPOTHESE **(H3)**: $\exists\alpha\in\mathbb{R}^-,\forall x\leq\alpha,(k_L-k_R)g(x)\geq0$
$\exists\beta\in\mathbb{R}^+,\forall x\geq\beta,(k_L-k_R)g(x)\leq0$

REMARQUE **(R1)**: Sous (Hg1) et (Hg2), (H2) ou (H3) impliquent:

$$\exists\kappa_0\in\mathbb{R}\ tel\ que\ \Phi(.,\kappa_0)\ est\ strictement\ monotone\ sur\ \mathbb{R}.$$

THEOREME: Sous **(H2)** ou **(H3)** **existence d'une solution entropique *u*.** De plus sous (H3), $m\leq u\leq M.$

PREUVE:

- Régularisation de la fonction *k:*

$$(k_\epsilon)_{\epsilon>0}\ telle\ que\ \forall x\in\Omega,\ k_\epsilon(x)\to k(x)\ et\ |k_\epsilon|_{BV}\leq|k|_{BV}$$

- Soient $u_\epsilon,\ u_{\epsilon,\mu}$ les solutions des problèmes régularisés:

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(k_\epsilon(x)g(u_\varepsilon))=0 \qquad (5) \qquad\qquad \frac{\partial u_{\epsilon,\mu}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}k_\epsilon g(u_{\varepsilon,\mu})=\mu\partial_{xx}u_{\epsilon,\mu} \qquad (6)$$

- Estimations obtenues: (H2) ou (H3) $\Rightarrow$ $\|u_\epsilon\|_{L^\infty}\leq C_1$ et $|k_\epsilon\Phi(u_\epsilon,\kappa)|_{BV(Q)}\leq C_2$
- Passage à la limite: Estimations + (R1) $\Rightarrow(u_\epsilon)_\epsilon\to u\ \ dans\ L^1(Q).$
- Reste à vérifier que u est bien une solution entropique:
  - on multiplie (6) par $sgn_\eta(u_{\epsilon,\mu}-\kappa)\varphi$
  - passage à la limite en μ puis en η puis en ϵ pour aboutir à (2)
  - on multiplie (6) par $\partial_1H_\eta(u_\epsilon,\kappa)\phi,\ \phi\in C_c^\infty([0,T[\times\mathbb{R})$ pour aboutir à (3)

  où $H_\eta(\tau,\kappa)=((dist(\tau,I[0,\kappa]))^2+\eta^2)^2-\eta$