Un problème d'Oseen extérieur en dimension deux

CHÉRIF AMROUCHE, HAMID BOUZIT

Laboratoire de Mathématiques Appliquées, CNRS UMR 5142, Université de Pau, 64000, FRANCE

1 Introduction

On considère un domaine extérieur Ω de $\mathbb{R}^2$ et on s'intérrèsse à l'étude du problème d'Oseen suivant:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta \boldsymbol{u} + k\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla\pi &= \boldsymbol{f} \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} &= g \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_* \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Comme le domaine est non borné, on pose une condition sur $\boldsymbol{u}$ à l'infini

$$\lim_{|x|\to+\infty} \boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{u}_\infty. \tag{0.2}$$

Cette condition est posée pour avoir le comportement de la vitesse à l'infini où, $\boldsymbol{u}_\infty$ est un veceur donné de $\mathbb{R}^2$. Les équations (0.1) sont obtenues par Oseen, en linéarisant le système de Navier-Stokes qui decrit les écoulements des fluides autour d'un obstacle $\overline{\Omega'} = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. Le nombre positif ν est la viscosité du fluide, $\boldsymbol{f}$, g et $\boldsymbol{u}_*$ sont des données du problème, representant les forces extérieures, la compressibilité du fluide et la "valeur" de la vitesse au bord $\partial\Omega$. Les inconnues sont la vitesse $\boldsymbol{u}$ et la pression π du fluide.

Utilisant une partition de l'unité (0.13), on décompose $(\boldsymbol{u},\pi)$ en $(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \pi_1 + \pi_2)$ où, $(\boldsymbol{u}_1,\pi_1)$ est solution d'un problème d'Oseen posé dans un borné et $(\boldsymbol{u}_2,\pi_2)$ est solution du problème d'Oseen posé dans tout le plan $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{0.3}$$

Prenant la divergence de la première équation de (0.3), le système se découple en deux équations et on est donc amené à l'étude du problème d'Oseen scalaire:

$$-\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} = f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2, \tag{0.4}$$

où $(\nu = k = 1)$, dont la solution fondamentale se comporte à l'infini:

$$\mathcal{O}(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi r}}e^{-\frac{s}{2}}[1 - \frac{1}{4r} + O(r^{-2})]. \tag{0.5}$$

On va donc, dans notre étude, choisir des poids de la forme $(1+\rho(x))^\alpha(1+s(x))^\beta$, où, $s(x) = r - x_1$. On donne, grâce en particulier aux propiétés du potentiel d'Oseen $\mathcal{O} * f$, des résultats d'existence et d'unicité en théorie L^p, $1 < p < \infty$. La résolution du problème d'Oseen dans le cas $\mathbb{R}^2$ permet ensuite d'étudier le problème extérieur qui est plus compliqué à la fois à cause du terme de bord et de la condition de compatibilité qui apparaissent en fonction des données et de l'exposant p. Le cas de la dimenssion 3, un peu moins compliqué, à été étudié par Finn (1965), Galdi (1990), Farwig (1990) et plus récement par Amrouche et Razafison.

2 Espaces fonctionnels

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $p > 1$ et $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev avec poids:

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in \mathcal{D}'(\Omega);\ \forall\lambda \in \mathbb{N}^2 : |\lambda| \le m,\ \rho^{(\alpha-m+|\lambda|)}\partial^\lambda u \in L^p(\Omega)\right\}.$$

C'est un espace de Banach reflexif, lorsqu' il est muni de sa norme naturelle. lorsque $\alpha + \frac{2}{p} \in \{1, \dots m\}$, on dit qu'on est dans un cas critique et un poids logarithmique est utilisé. Pour plus de détails on peut se référer à Kufner, Hanouzet, et Amrouche-Girault-Giroire. néaumoins, on rappelle quelques propriétés et résultats qu'on utilisera par suite. L'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \longrightarrow \partial^\lambda u \in W_\alpha^{m-|\lambda|,p}(\Omega)$$

est continue. L'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ contient des polynômes de degrès inférieur ou égal à j, noté $\mathcal{P}_j$, où $j \in \mathbb{N}$ est défini par

$$j = [m - \alpha - \frac{2}{p}], \quad \text{si} \quad \alpha + \frac{2}{p} \notin \mathbb{Z}^- \quad \text{et} \quad j = m - 1 - \alpha - \frac{2}{p}, \quad \text{si non.}$$

Le théorème suivant est fondamental (*c.f* Amrouche-Girault-Giroire)

Théorème 0.1 *Soit $m \ge 1$ un entier et α un nombre réel, alors il existe une constante positive C telle que*

$$\forall u \in W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^2), \quad \inf_{\lambda\in\mathcal{P}_j} \|\, u + \lambda \,\|_{W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^2)} \le C|u|_{W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^2)},$$

où j est le plus haut degrès des polynômes contenus dans $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^2)$.

3 L'équation d'Oseen scalaire dans $\mathbb{R}^2$.

Nous avons le résultat d'intégrabilité pour la solution fondamentale (0.5):

$$\forall p > 3, \ \ \mathcal{O} \in L^p(\mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad \forall p \in]\frac{3}{2}, 2[, \ \ \nabla\mathcal{O} \in L^p(\mathbb{R}^2).$$

Notons aussi que $\mathcal{O} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et $\nabla\mathcal{O} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Rappelons qu'un opérateur $T : f \mapsto T(f)$ est dit *weak-type (p,q)* s' il vérifie (*c.f.* Stein):

$$\forall\lambda > 0, \ \ mes\{x \in \mathbb{R}^2; |(T(f)(x)| > \lambda\} \le \left(C_{p,q}\frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}}{\lambda}\right)^q. \tag{0.6}$$

Utilisant, d'une part les opérateurs *weak-type (p,q)*, le théorème d'interpolation de Marcinkievicz et d'aute part les injections de Sobolev on obtient:

Théorème 0.2 *Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$. Alors, $\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}(\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $\frac{\partial}{\partial x_1}(of) \in L^p(\mathbb{R}^2)$ et satisfait l'estimation*

$$\|\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}(\mathcal{O} * f)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\frac{\partial}{\partial x_1}(of)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \tag{0.7}$$

De plus,

1) i) *si $1 < p < 2$, $\nabla(\mathcal{O} * f) \in L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^2) \cap L^{\frac{2p}{2-p}}(\mathbb{R}^2)$.*

ii) *Si $p = 2$, $\nabla(\mathcal{O} * f) \in L^r(\mathbb{R}^2)$, $r \ge 6$.*

iii) *Si $2 < p < 3$, $\nabla(\mathcal{O} * f) \in L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$.*

2) *Si $1 < p < \frac{3}{2}$, $\mathcal{O} * f \in L^{\frac{3p}{3-2p}}(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$.*

Avec des estimations du type (0.7).

Dans le résultat suivant on résout l'équation (0.4) dans le cas où f est donnée dans des espaces avec des poids anisotropiques.

Théorème 0.3 *On suppose que $2 < p < \frac{32}{11}$ et $f \in L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$, alors on a $u = \mathcal{O} * f \in L^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$, $\frac{\partial u}{\partial x_2} \in L^p_{0,\frac{1}{4}}(\mathbb{R}^2)$, $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\mathbb{R}^2)$ et $\nabla^2 u \in L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\mathbb{R}^2)$. De plus, l'estimation suivant est vérifiée*

$$\int_{\mathbb{R}^2}(1+r)^{-\frac{p}{2}}(1-s)^{\frac{p}{4}}|u|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^2}(1+r)^{\frac{p}{2}}(1+s)^{\frac{p}{4}}(|\frac{\partial u}{\partial x_1}|^p + |\nabla^2 u|^p)\,dx$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^2}(1+s)^{\frac{p}{4}}|\frac{\partial u}{\partial x_2}|^p\,dx \le C\int_{\mathbb{R}^2}(1+r)^{\frac{p}{2}}(1+s)^{\frac{p}{4}}|f|^p\,dx.$$

Le système d'Oseen dans $\mathbb{R}^2$

On étudie, pour le système (0.3), l'existence et l'unicité du couple vitesse-pression $(\boldsymbol{u},\pi)$ dans des espaces de Sobolev à poids.
un résultat d'unicité est donné par:

Lemme 0.1 *Si $(\boldsymbol{u},\pi) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ est une solution de (0.3) correspondant aux données $(\boldsymbol{f},g) = (\boldsymbol{0},0)$ alors $\boldsymbol{u}$ et π sont des polynômes.*

On définit l'espace des polynômes :

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}_k = \left\{(\boldsymbol{\lambda},\mu) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_k \times \mathcal{P}^\Delta_{k-1};\ -\Delta\boldsymbol{\lambda} + \frac{\partial\boldsymbol{\lambda}}{\partial x_1} + \nabla\mu = 0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{\lambda} = 0\right\}.$$

Notons que $\boldsymbol{\mathcal{N}}_0 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ et $\boldsymbol{\mathcal{N}}_1 = \boldsymbol{\mathcal{S}}_1 \times \mathbb{R}$ où, $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ est l'espace des polynômes de degrès un et indépendants de x_1.
Un résultat d'existence est donné par le théorème suivant.

Théorème 0.4 *Soit $(\boldsymbol{f},g) \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^2) \times L^p(\mathbb{R}^2)$, tel que $\frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^2)$ et vérifiant, lorsque $1 < p \le 2$, les conditions de compatibilité suivantes:*

$$\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{1}\rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^2)\times\boldsymbol{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^2)} = 0, \tag{0.8}$$

$$\langle\frac{\partial g}{\partial x_1}, x_i\rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^2)\times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^2)} = 0. \tag{0.9}$$

1) *Si $1 < p < 3$, alors le problème (0.3) admet une unique solution $(\boldsymbol{u},\pi) \in \boldsymbol{L}^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^2) \times L^p(\mathbb{R}^2)$ tel que $\nabla\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^2)$ et $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^2)$.*

2) *Si $p \ge 3$, le problème (0.3) admet une solution $(\boldsymbol{u},\pi) \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^2) \times L^p(\mathbb{R}^2)$, telle que $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^2)$, unique à un élément $\mathcal{N}_0$ près.*

Le problème extérieur

Dans cette section on étend les résultats obtenus dans le plan au problème extérieur. On définit le noyau de l'opérateur:

$$(\boldsymbol{u},\pi) \longmapsto T(\boldsymbol{u},\pi) = (-\Delta\boldsymbol{u} + \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla\pi, \operatorname{div}\boldsymbol{u}),$$

par

$$\mathcal{K}_p^+(\Omega) = \{(\boldsymbol{u},\pi) \in \overset{\circ}{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega);\ T(\boldsymbol{u},\pi) = (\boldsymbol{0},0)\}.$$

De plus, si $1 < p < 3$, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^r(\Omega)$ oû, r est donné par:

$$\frac{3p}{3-p} \le r \le \frac{2p}{2-p} \quad \text{si} \quad 1 < p < 2 \quad \text{et} \quad \frac{3p}{3-p} \le r \le \infty \quad \text{si} \quad 2 \le p < 3.$$

On commence par:

Le cas $p = 2$.

On suppose que Ω est un ouvert Lipschitsien et on donne la définition d'une solution faible du problème (0.1).

Définition 0.2 un vecteur $\boldsymbol{u} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est dit solution faible du problème (0.1) avec $\boldsymbol{u}_* = \boldsymbol{0}$ si
(i) $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1_{loc}(\Omega)$, tel que $\nabla\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ et $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ sur $\partial\Omega$,
(ii) $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$ dans Ω,
(iii) $\forall\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega);\ \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0\}$,

$$\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{\varphi}\,dx - \int_\Omega \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_1}\boldsymbol{\varphi}\,dx = \langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}'(\Omega)\times\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)}. \tag{0.10}$$

Le noyau $\mathcal{K}_2^-(\Omega)$ de l'opérateur $\mathbf{T}$ est caractérisé par:

$$\mathcal{K}_2^+(\Omega) = \{(\boldsymbol{0},0)\}. \tag{0.11}$$

On donne maintenant un premier résultat d'existence.

Proposition 0.3 *Soit Ω un domaine extérieur et Lipschitsien de $\mathbb{R}^2$. Supposons que $\boldsymbol{u}_* = \boldsymbol{0}$, $g = 0$ et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)$ alors, le problème (0.1) admet une unique solution $(\boldsymbol{u},\pi) \in \left(\overset{\circ}{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,2}(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega)\right) \times L^2(\Omega)$. De plus, $\boldsymbol{u}$ satisfait l'équation d'énergie :*

$$\int_\Omega |\nabla\boldsymbol{u}|^2\,dx = \langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}\rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)\times\overset{\circ}{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,2}(\Omega)}. \tag{0.12}$$

On sait trouver une unique paire $(\boldsymbol{u},\pi) \in \overset{\circ}{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,2}(\Omega) \times L^2_{loc}(\overline{\Omega})$ solution du problème (0.1). Pour motrer que $\boldsymbol{u}$ appartient à $\boldsymbol{L}^6(\Omega)$ et π appartient à $L^2(\Omega)$, on utilise la partition de l'unité suivante

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2),\ \varphi_1 + \varphi_2 = 1,\ \varphi_2 = 1 \quad \text{dans} \quad B_R,\ \operatorname{Supp}\varphi_2 \subset B_{R+1}, \tag{0.13}$$

et on décompose $\tilde{\boldsymbol{u}}$ et $\tilde{\pi}$ en: $\tilde{\boldsymbol{u}} = \tilde{\boldsymbol{u}}\varphi_1 + \tilde{\boldsymbol{u}}\varphi_2$ et $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}\varphi_1 + \tilde{\pi}\varphi_2$. Le couple $(\tilde{\boldsymbol{u}}\varphi_2, \tilde{\pi}\varphi_2)$ appartient à $\in (\boldsymbol{W}_0^{1,2}(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega)) \times L^2(\Omega)$, alors que $(\tilde{\boldsymbol{u}}\varphi_1, \tilde{\pi}\varphi_1)$ verifie au sens des distributions le système suivant:

$$-\Delta(\tilde{\boldsymbol{u}}\varphi_1) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\tilde{\boldsymbol{u}}\varphi_1) + \nabla(\tilde{\pi}\varphi_1) = \boldsymbol{H}, \quad \operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{u}}\varphi_1) = G \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2,$$

où,

$$\boldsymbol{H} = \varphi_1\left(-\Delta\tilde{\boldsymbol{u}} + \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial x_1} + \nabla\tilde{\pi}\right) + \tilde{\boldsymbol{u}}\Delta\varphi_2 + 2\nabla\tilde{\boldsymbol{u}}.\nabla\varphi_2 - \tilde{\boldsymbol{u}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} - \tilde{\pi}\nabla\varphi_2,$$

$$G = -\tilde{\boldsymbol{u}}\nabla\varphi_2.$$

On montre que $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^2)$, $G \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $\frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-2,2}(\mathbb{R}^2)$ et vérifient les conditions de compatibilité (0.8), (0.9) et on utilise les résultats obtenus dans le plan. On pose:

$$Z_p = \{g = \tilde{g}_{|\Omega}; \tilde{g} \in \widetilde{L}^p(\mathbb{R}^2); \forall\mu \in \mathcal{P}_{[2-\frac{2}{p'}]}, \langle\frac{\partial\tilde{g}}{\partial x_1},\mu\rangle = 0\}.$$

Utilisant un lemme de relèvement on montre le théorème suivant

Théorème 0.5 *Soit Ω un domain extérieur et Lipschtsien de $\mathbb{R}^2$. Soit $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)$, $g \in Z_2$ et $\boldsymbol{u}_* \in \boldsymbol{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Alors, le problème (0.1) admet une unique solution $(\boldsymbol{u},\pi) \in \left(\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega)\right) \times L^2(\Omega)$.*

Le cas général: $1 < p < \infty$.

On veut ici, résoudre le problème (0.1) dans le cas général $1 < p < \infty$. On commence par étudier le problème pour $p > 2$ et on procède par dualité. Pour caractériser le Noyau $\mathcal{K}_p^+(\Omega)$ pour $p \ge 2$ on a aura besoin des définitions suivantes:

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{\mathcal{O}} * \frac{1}{2\pi|\Gamma|}\boldsymbol{\delta}_\Gamma \quad \text{et} \quad \pi_0 = \mathcal{P} * \frac{1}{2\pi|\Gamma|}\boldsymbol{\delta}_\Gamma, \tag{0.14}$$

où, la paire $(\boldsymbol{\mathcal{O}},\mathcal{P})$ désigne la solution fundamentale du problème d'Oseen en dimension deux.

Proposition 0.4 *Soit Ω un domaine extérieur de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^{1,1}$.*
(i) Si $2 \le p < 3$ alors, $\mathcal{K}_p^+(\Omega) = \{(\boldsymbol{0},0)\}$.
(ii) Si $p \ge 3$ alors

$$\mathcal{K}_p^+(\Omega) = \{c(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{u}_0, \eta - \pi_0),\ c \in \mathbb{R}\},$$

où $(\boldsymbol{\mu},\eta)$ est l'unique solution dans $\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ du problème

$$-\Delta\boldsymbol{\mu} + \frac{\partial\boldsymbol{\mu}}{\partial x_1} + \nabla\eta = \boldsymbol{0}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{\mu} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{sur} \quad \boldsymbol{\Gamma}.$$

Le cas $1 < p < 2$

Pour résoudre le problème (0.1) avec $1 < p < 2$, on a besoin du résultat suivant

Proposition 0.5 *On suppose $1 < p < 2$ et Ω un domaine extérieur de classe $\mathcal{C}^{1,1}$. Soit $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\Omega)$ satisfaisant, si $1 < p \le \frac{3}{2}$, la condition de compatibilité:*

$$\forall(\boldsymbol{w},\eta) \in \mathcal{K}_p^-(\Omega), \ \ \langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{w}\rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\Omega)\times\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_0^{1,p'}(\Omega)} = 0. \tag{0.15}$$

Alors, il existe un unique $\boldsymbol{u} \in \overset{\circ}{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,p}(\Omega)$ vérifiant pour tout $(\boldsymbol{v},q) \in (\overset{\circ}{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega))$, tel que $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$:

$$\langle\boldsymbol{u}, -\Delta\boldsymbol{v} - \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_1} + \nabla q\rangle_{\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_0^{1,p}(\Omega)\times\boldsymbol{W}_0^{-1,p'}(\Omega)} = \langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\Omega)\times\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_0^{1,p'}(\Omega)}. \tag{0.16}$$

Finalement, on résout le problème d'Oseen nonhomogène, pour $1 < p < +\infty$.

Théorème 0.6 *Soient Ω un domaine extérieur de classe $\mathcal{C}^{1,1}$, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\Omega)$, $g \in Z_p(\Omega)$ et $\boldsymbol{u}_* \in \boldsymbol{W}^{\frac{1}{p'},p}(\Gamma)$. De plus, on suppose que, si $1 < p \le \frac{3}{2}$, on a la condition de compatibilité*

$$\forall(\boldsymbol{v},\eta) \in \mathcal{K}_{p'}^-(\Omega), \ \ \langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle_\Omega - \langle g,\eta\rangle_\Omega + \langle(\nabla\boldsymbol{v} - \eta I).\boldsymbol{n},\boldsymbol{u}_*\rangle_\Gamma = 0. \tag{0.17}$$

Alors, le problème (0.1) admet une solution $(\boldsymbol{u},\pi) \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ telle que $\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\Omega)$. De plus,
(i) si $1 < p < 3$ alors, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^r(\Omega)$, et $(\boldsymbol{u},\pi)$ est l'unique solution de (0.1).
(ii) Si $p \ge 3$, $(\boldsymbol{u},\pi)$ est une solution de (0.1) unique à un élément près de $\mathcal{K}_p^+(\Omega)$.