Méthode de "Matching Pursuit" pour le problème de restauration d'images avec coefficient d'atténuation inconnu.

E.Nasr & A.Yger

Labag, Laboratoire Bordelais d'Analyse et de Géométrie, 351 cours de la Libération, 33405 Talence, France

Résumé

Le problème typique de reconstruction d'image en tomographie d'émission monophotonique est de trouver $f(x)$ à partir des mesures $g(\varphi, s)$ de sa transformation de Radon attenuée $\mathcal{R}_\mu f$ définie par :

$$\mathcal{R}_\mu f(\varphi, s) \equiv \int_{x.\theta=s} e^{-\int_0^\infty \mu(x+t\theta^\perp)dt} f(x)dx = g(\varphi, s)$$

où $f(x)$ est une fonction qui décrit la distribution des radionucléides dans le corps d'un patient et $\mu(x)$ le coefficient d'atténuation du tissue biologique, avec $x \in \mathbb{R}^2$, $s \in \mathbb{R}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et $\theta = (\cos\varphi,\ \sin\varphi)$.
Premièrement, nous présentons une formule d'inversion analytique exacte de la transformation de Radon atténuée avec un coefficient d'atténuation connu [1]. Ensuite nous décrivons une méthode pour trouver le schéma de l'attenuation, en supposant qu'elle est une transformation affine d'une certaine attenuation-prototype connue μ_0 [2].
Enfin, nous discuterons nouvelle méthode permettant de retrouver le coefficient d'atténuation $\mu(x)$, puis la fonction de distribution des radionucléides $f(x)$ à partir des mesures prises $g(\varphi, s)$. Dans une première étape nous donnons une formulation théorique du problème, puis nous mettrons en évidence l'utilisation de la technique du "Matching pursuit" adaptée [3] au cadre de la tomographie, s'élaborant dans la façon de choisir et construire un dictionnaire de motifs convenable au problème posé et enfin on expose les résultats numériques.

I Inversion Analytique

Définition 1 *La transformation de Hilbert est définie par :*

$$(Hg)(s) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{s-t}dt.$$

On pose :

$$h = \frac{1}{2}(I + iH)\mathcal{R}_\mu \text{ et } D_\mu(x, \theta^\perp) = \int_0^{+\infty} \mu(x + t.\theta^\perp)dt.$$

Théorème 1 *Soit $g = \mathcal{R}_\mu f$ et h la fonction définie ultérieurement,alors on a :*

$$f(x) = \frac{1}{4\pi}\ Re\ div\ \int_{\mathcal{S}^1} \theta.e^{(D_\mu)(x,\theta^\perp)}(e^{-h}He^h g)(\theta, x.\theta)d\theta.$$

II Problème d'Identification

Dans cette partie, on évoquera le problème d'identification de la transformation de Radon atténuée *i.e.* déterminer le coefficient d'atténuation $\mu(x)$, sachant que $f(x)$ est aussi inconnue [2].
On suppose que μ est une distortion affine d'une certaine distribution d'atténuation "prototype" μ_0 *i.e.* :

$$\mu(x) = \mu_0(Ax + a),\ A \in \mathcal{M}^{2\times 2} \text{ et } a \in \mathbb{R}^2$$

où A et a sont inconnus, à déterminer à partir des mesures $g(\theta, s)$.

Théorème 2 *Soit f une fonction suffisament régulière à support compact, alors pour tout entier k, tel que $0 \leq m < k$, on a :*

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} s^m e^{\frac{1}{2}(I+iH)\mathcal{R}_\mu(\theta,s)+ik\varphi}\mathcal{R}_\mu f(\theta, s)dsd\varphi = 0.$$

Théorème 3 *Posons $w = (A\theta^\perp)^\perp/||A\theta^\perp||$, on a :*

$$\left(\frac{1}{2}(I + iH)\mathcal{R}_\mu\right)(\theta, s) = \frac{1}{||A\theta^\perp||}\left(\frac{1}{2}(I + iH)\mathcal{R}_{\mu_0}\right)(w, (sA\theta + a).w).$$

L'algorithme. Pour calculer A et a,on introduit :
$\xi(A, a, \theta, s) = \frac{1}{||A\theta^\perp||}\left(\frac{1}{2}(I + iH)\mathcal{R}_{\mu_0}\right)(w, (sA\theta + a).w)$,
$g_m(A, a, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^m e^{\xi(A,\varphi,\theta,s)}g(\theta, s)ds \qquad m = 0,\ 1\ ...$
En combinant les théorèmes 2 et 3, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\varphi}g_m(A, a, \varphi)d\varphi = 0 \qquad 0 \leq m < k.$$ L'intégrale donne :

pour p fini et $\varphi_j = 2\pi j/p$, $j = 0,\ ...,\ p-1$,

$$\hat{g}_{m,k}(A, a) = \frac{2\pi}{p}\sum_{j=0}^{p-1} e^{ik\varphi_j}g_m(A, a, \varphi_j) = 0, \quad 0 \leq m < k < P, \text{ avec } P \ll p.$$

On calcule A et a en résolvant ce système non linéaire.

III Matching Pursuit En 1-D

Soit H l'espace N-dimensionnel de Hilbert et un dictionnaire $D = (d_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in H$. On veut trouver une représentation $\tilde{x}$ de $x \in H$, telle que :

$$\tilde{x} = \sum_{k=1}^{K} w_k d_{\gamma_k},\ \text{où } w_k \text{ et } d_{\gamma_k} \text{ sont choisis pour minimiser } ||x - \tilde{x}||_H$$

En d'autre terme, on veut trouver $d_{\gamma_k} \in D$ qui correspondent au mieux à la structure interne de x. La technique de "Matching Pursuit" propose la méthode de seléction suivante. Soit $d_{\gamma_1} \in D$, le vecteur $x = R^1x$ s'écrit :

$$R^1x = \langle R^1x, d_{\gamma_1}\rangle d_{\gamma_1} + R^2x \text{ avec } ||R^1x||^2 = |\langle R^1x, d_{\gamma_1}\rangle|^2 + ||R^2x||^2,$$

où R^2x est le vecteur résidu aprés l'approximation de x dans la direction de d_{γ_1} pour minimiser $||R^2x||^2$, on doit choisir $d_{\gamma_1} \in D$ tel que :

$$|\langle R^1x, d_{\gamma_1}\rangle| \geq \max_{\gamma\in\Gamma} |\langle R^1x, d_\gamma\rangle|.$$

Ayant calculé R^nx à l'ordre n, $R^{n+1}x$ se calcul en trouvant d_{γ_n} tel que :

$$R^nx = \langle R^nx, d_{\gamma_n}\rangle d_{\gamma_n} + R^{n+1}x, \text{ oú } |\langle R^nx, d_{\gamma_n}\rangle| \geq \max_{\gamma\in\Gamma}|\langle R^nx, d_\gamma\rangle|.$$

Enfin, à l'itération K, $\tilde{x}$ s'écrit :

$$\tilde{x} = \sum_{k=1}^{K} w_k d_{\gamma_k} \text{ avec } w_k = \langle R^kx, d_{\gamma_k}\rangle.$$

IV Matching Pursuit En 2-D

• **Concept :**
Soit $X \in \mathcal{M}^{N\times M}$ une image formée des vecteurs colonnes x_m et $D \in \mathcal{M}^{N\times K}$ un dictionnaire formé par les vecteurs colonnes d_k. En écrivant :

$$\tilde{x}_m = Dw_m = \sum_{k=1}^{K} w_m(k)d_k, \quad \text{m=1, ..., M}$$

où $w_m(k)$ et d_k sont respectivement les coefficients et les vecteurs calculés par la méthode de "Matching Pursuit en 1-D" pour approximer le vecteur colonne x_m de X par $\tilde{x}_m$.
On pose $W \in \mathcal{M}^{K\times M}$ formée par les vecteurs colonnes w_m et $\widetilde{X} \in \mathcal{M}^{N\times M}$ formée par les vecteurs colonnes $\tilde{x}_m$, la relation devient : $\widetilde{X} = DW$.
Afin de minimiser :

$$||X - \widetilde{X}|| = ||X - DW||,$$

on recherche alors à construire le dictionnaire le plus compatible avec la nature de l'image X.

• **Algorithme de décomposition :**
Etant donné l'image $X \in \mathcal{M}^{N\times M}$, le dictionnaire $D \in \mathcal{M}^{N\times K}$ et le nombre souhaité NB de vecteurs pour approximer chaque vecteur colonne de X :
Pour chaque vecteur $X(:, m)$, $m = 1,\ ...,\ M$
Faire NB fois les étapes suivantes :

1. Calculer $Q = X^\perp(:, m_0)D$, $Q(k)$ représente le produit scalaire du vecteur $X(:, m_0)$ avec le vecteur $D(:, k)$.
2. Trouver, en valeur absolue, la valeur maximale $Q(k_0)$ de $Q(k)$.
3. Utiliser le vecteur $D(:, k_0)$ pour approximer $X(:, m_0)$:

$$\widetilde{X}(:, m_0) = \widetilde{X}(:, m_0) + \frac{Q(k_0)}{||Q(k_0||)}D(:, k_0).$$

4. Calculer le résidu de $X(:, m_0)$:

$$X(:, m_0) = X(:, m_0) - \frac{Q(k_0)}{||Q(k_0)||}D(:, k_0).$$

V Construction de D

Dans cette partie, on décrit une méthode pour construire un dictionnaire D adapté à la technique de "Matching Pursuit" pour la classe d'image :
$X = \left\{\mathcal{R}_\mu f, \text{ où } \mu \text{ est une distribution d'atténuattion et } f \text{ une image}\right\}$.

• **Cadre théorique :**
On a : $\mathcal{R}_\mu f \equiv \int_{x,\theta=s} e^{-D_\mu}f(x)dx = g(\varphi, s)$, avec $D_\mu = \int_0^{+\infty}\mu(x + t.\theta^\perp)dt$.
Supposons que $\mu(x) \ll 1$, alors on a :

$$e^{-D_\mu} \simeq 1 - D_\mu \ \Rightarrow\ \mathcal{R}_\mu f \simeq \mathcal{R}f - B(f, \mu), \text{ où } B(f, \mu) = \mathcal{R}(f.D_\mu).$$

Donc la transformation de Radon atténuée de f est la différence entre la transformation de Radon de f et le terme correctif $B(f, \mu)$. D'autre part :

$$B(f, \mu) \simeq \mathcal{R}f - \mathcal{R}_\mu f.$$

On interprète alors $B(f, \mu)$ comme étant le terme qui régit les informations que l'atténuation μ génère pour $\mathcal{R}_\mu f$.
Donc d'ici vient l'idée de former le dictionnaire D à partir de $B(I, A)$, où I et A sont les listes des images et d'atténuations de résolution $1/N$ telles que :

$$(I,\ A) = \left\{(I^{(i,\ j)},\ A^{(i,\ j)}) \in \mathcal{M}^{N\times N} \times \mathcal{M}^{N\times N}\right\}$$

où $I^{(i,\ j)}$ et $A^{(i,\ j)}$ sont les fonctions caractéristiques du disque de centre $x(-1 + i \cdot p; -1 + j \cdot p)$ et de rayon r, ceci pour :
$1 \leq i,\ j \leq n = 2/p$, $0 < p,\ r \leq 1$ et $r > p/2$.

• **Algorithme de construction :**
Pour $1 \leq i_0,\ j_0 \leq n$ et $1 \leq k \leq K$, on défini les routines suivantes :

1. La routine $B^{(i_0,\ j_0)} = \mathcal{B}(I^{(i_0,\ j_0)};\ A^{(i,\ j)})$, calcule la liste des images suivantes :

$$B^{(i_0,\ j_0)} = \mathcal{R}I^{(i_0,\ j_0)} - \mathcal{R}_{A^{(i,\ j)}}I^{(i_0,\ j_0)}$$

2. La routine $M^{(i_0,\ j_0)} = \mathcal{M}(B^{(i_0,\ j_0)})$, calcule la matrice de corrélation de la liste $B^{(i_0,\ j_0)}$.
3. Le dictionnaire D est formé de deux sous-dictionnaires D_1 et D_2 calculés par la routine suivante :

$$D^{(i,\ j,\ k)} = \left(D_1^{(i,\ j,\ k)},\ D_2^{(i,\ j,\ k)}\right) = \mathcal{D}(M^{(i,\ j)},\ A^{(i,\ j)},\ B^{(i,\ j)},\ k),$$

qui dispose des deux sous-routines suivantes :

$$D_1^{(i,\ j,\ k)} = \mathcal{D}_1\left(M^{(i,\ j)},\ B^{(i,\ j)},\ k\right) \text{ et } D_2^{(i,\ j,\ k)} = \mathcal{D}_2\left(M^{(i,\ j)},\ A^{(i,\ j)},\ k\right)$$

▷ D_1 contient les K premiers modes propres de la liste de matrices de corrélation $M^{(i,\ j)}$ calculées pour toutes les images $B^{(i,\ j)}$.

▷ D_2 contient les K premiers modes propres des atténuations $A^{(i,\ j)}$; antécédentes des éléments de D_1 qui correspondent.

• **Commentaires :**

1. les éléments de D_1 sont les modes propres de la corrélation des images $B^{(i,\ j)} = \mathcal{R}I^{(i,\ j)} - \mathcal{R}_{A^{(i,\ j)}}I^{(i,\ j)}$. Alors pour $(i_0,\ j_0)$ donné :

$$M^{(i_0,\ j_0)} = \text{corr}\left(\mathcal{R}I^{(i_0,\ j_0)} - \mathcal{R}_{A^{(i,\ j)}}I^{(i_0,\ j_0)}\right),\ (1 \leq i,\ j \leq n).$$

Or $\mathcal{R}I^{(i_0,\ j_0)}$ est indépendant de $A^{(i,\ j)}$.
Par suite, disposant des mesures $\mathcal{R}_\mu f$ et ayant $B(f,\ \mu) = \mathcal{R}f - \mathcal{R}_\mu f$, on va chercher à décomposer $\mathcal{R}_\mu f$ suivant D_1.
2. On a : $B(f,\ \mu) = \mathcal{R}f - \mathcal{R}_\mu f \Rightarrow \mathcal{R}^{-1}\left(B(f,\ \mu)\right) = f - \mathcal{R}^{-1}\left(\mathcal{R}_\mu f\right)$.
($\mathcal{R}^{-1}$: Opérateur inverse de $\mathcal{R}$).
Comme les éléments de D_2 localisent les atténuations antécédentes des éléments de D_1, on croit alors qu'en décomposant $\mathcal{R}^{-1}\left(\mathcal{R}_\mu f\right)$ suivant D_2 permet de localiser les zones d'activités importantes de μ.

V Quelques Résultats Numériques

Fig. 1: Image fantôme f de taille 128×128

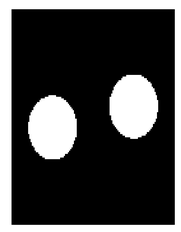

Fig. 2: Atténuation fantôme μ de taille 128×128

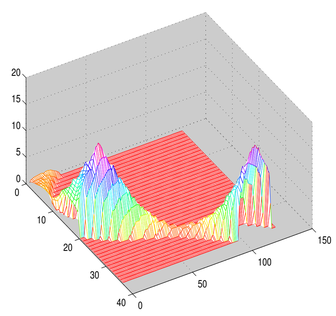

Fig. 3: Elément $D_1^{(1,\ 1,\ 1)}$

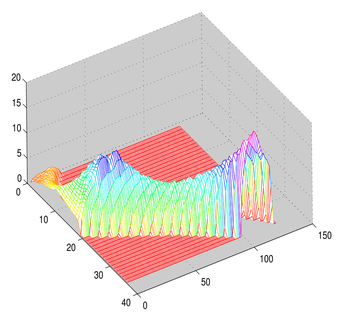

Fig. 4: Elément $D_1^{(1,\ 2,\ 1)}$

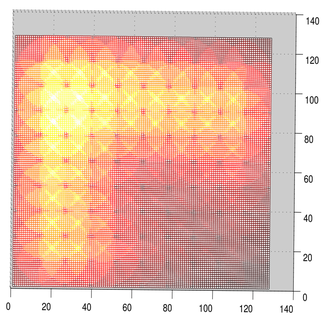

Fig. 5: Elément $D_2^{(1,\ 1,\ 1)}$

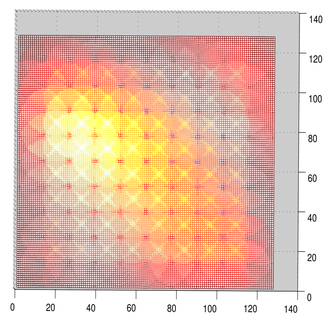

Fig. 6: Elément $D_2^{(1,\ 2,\ 1)}$

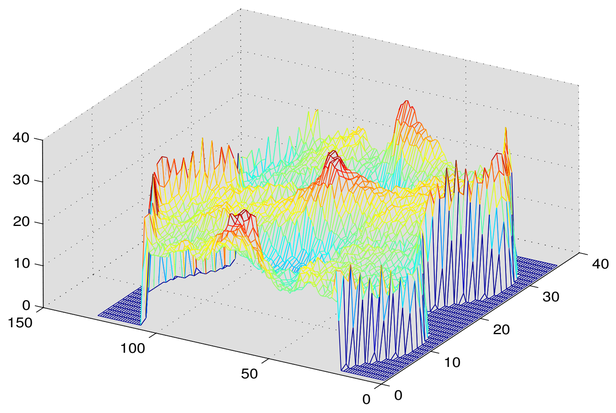

Fig. 7: La trasformation de Radon Atténuée $\mathcal{R}_\mu f$

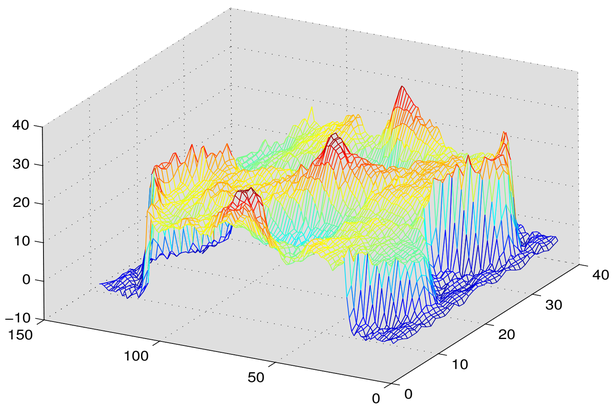

Fig. 8: L'approximation de $\mathcal{R}_\mu f$ *via* D_1

VI Conclusions et Perspectives

– Oscillations des modes propres (éléments de D_1) le long des graphes de fonctions trigonométriques (Fig.1), (le cas de deux Dirac).

– Localisation des zones d'activités de l'atténuation (éléments de D_2)(Fig.3).

– Restaurer μ éventuellement à partir de D_2.

– Possibilité d'utiliser le "Matching Pursuit Orthogonal" pour réduire l'erreur d'approximation.

Références

[1] F.Natterer, *Inversion of the attenuated Radon transform*, Inverse Problems, Vol.17, Issue.1 (2001).

[2] F.Natterer, *Determination of tissue attenuation in emission tomography of optically dense media*, Inverse Problems, Vol.9, Issue.6 (1993).

[3] A.P Berg, W.B Mikhael, *An efficient structure and algorithme for image representation using nonorthogonal basis images*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol.44, No.10 (1997).