Enrichissement singulier à l'aide d'une fonction cut-off d'un fond de fissure avec XFEM

Société de
Mathématiques appliquées
et industrielles

E. Chahine
MIP, CNRS UMR 5640, INSAT, Département GMM, Complexe scientifique de Rangueil, 31077 Toulouse, France
elie.chahine@insa-toulouse.fr
P. Laborde
MIP, CNRS UMR 5640, UPS Toulouse 3, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France
laborde@math.ups-tlse.fr
Y. Renard
MIP, CNRS UMR 5640, INSAT, Département GMM, Complexe scientifique de Rangueil, 31077 Toulouse, France
yves.renard@insa-toulouse.fr

CANUM

29 mai - 2 juin 2006
Beg er Lenn
Guidel, Morbihan

1 Introduction

La modélisation des fissures joue un rôle important dans la compréhension des comportements des structures, d'où l'intérêt du développement de méthodes d'éléments finis adaptées. On s'intéresse dans ce qui suit au problème d'élasticité linéaire défini sur un domaine fissuré. La méthode XFEM consiste à enrichir par des fonctions singulières et par une fonction discontinue la base d'une méthode d'éléments finis classique définie sur un maillage du domaine non fissuré (voir [3]). Elle permet alors de modéliser la propagation d'une fissure en utilisant un maillage fixe indépendant de la géométrie de la fissure. Des tests numériques ont montré dans [2] que cette méthode converge en $\sqrt{h}$ pour une méthode affine, où h est le pas du maillage. La variante de XFEM, dont nous présentons l'analyse mathématique et numérique (voir [1]), permet d'améliorer la vitesse de convergence (elle sera en h) sans augmenter le coût de calcul. Le résultat de convergence obtenu est le premier résultat mathématique pour ce type de méthodes enrichies.

2 Problème d'élasticité

Soit Ω un domaine fissuré de frontière $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_C$, Γ_C étant la fissure, avec

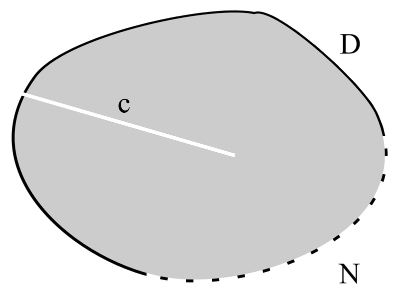
- Γ_D et Γ_N respectivement une frontière de Dirichlet et une frontière de Neumann.

➡ Le problème d'élasticité linéaire défini sur Ω s'écrit :

$$\text{Trouver } u \in \vartheta \text{ tel que } a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in \vartheta, \tag{1}$$

où

- $\vartheta = \{v \in H^1(\Omega);\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ est l'espace des déplacements admissibles,
- $a(u,v) = \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u)\, dx$,
- $l(v) = \int_\Omega f.v + \int_{\Gamma_N} g.v\, d\Gamma$,
- $\sigma(u) = \lambda tr\varepsilon(u) I + 2\mu\varepsilon(u)$ est le tenseur des contraintes,
- $\varepsilon(u)$ est le tenseur des déformations,
- f et g sont deux forces extérieures appliquées respectivement sur Ω et sur Γ_N,
- $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ sont les coefficients de Lamé.



En supposant que Ω et les données sont suffisamment régulières, la solution u du problème (1) vérifie (voir [4])

$$u - (c_1 u_I + c_2 u_{II}) = u - u_s \in H^{2+\epsilon}(\Omega), \tag{2}$$

u_s étant une partie singulière, et u_I et u_{II} les champs de déplacement associés respectivement aux modes I et II de fissuration. Elles sont données en coordonnées polaires par

$$u_I = \frac{K_I}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}(1+\nu)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}(3-4\nu-\cos\theta)\\ \sin\frac{\theta}{2}(3-4\nu-\cos\theta)\end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$u_{II} = \frac{K_{II}}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}(1+\nu)\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}(C_3+2+\cos\theta)\\ \sin\frac{\theta}{2}(C_3-2+\cos\theta)\end{pmatrix}, \tag{4}$$

où K_I, K_{II} désignent les facteurs d'intensité de contraintes, r la distance à la pointe de la fissure, ν le coefficient de poisson et $C_3 = 3-4\nu$ pour le problème des déformations planes.

3 Discrétisation

On désigne par

- $H(x)$ une fonction discontinue donnée par :

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } (x-x^*).\ n \ \geq\ 0, \\ -1 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{5}$$

x^* étant la pointe de la fissure et n une normale à la fissure supposée rectiligne,

- $F_j(x)$, $1 \leq j \leq 4$, les fonctions d'enrichissement singulières données par :

$$\{F_j(x),\ 1 \leq j \leq 4\} =$$
$$\{\ \sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2}), \sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2}), \sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\theta), \sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\theta)\ \}, \tag{6}$$

- $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$, h étant le pas du maillage.

On définit une méthode d'éléments finis classique affine sur $\mathcal{T}_h$. Soit φ_i, $i \in I$, les fonctions de formes P_1 associées à la méthode. L'espace discrétisé de la variante de XFEM proposée s'écrit

$$\vartheta^h = \left\{ v^h = \sum_{i\in I} a_i\varphi_i + \sum_{i\in I_H} b_i H\varphi_i + \sum_{j=1}^{4} c_j F_j \gamma;\ a_i, b_i, c_j \in \mathbb{R}^2 \right\}, \tag{7}$$

où

- I est l'ensemble des indices des nœuds de la methode d'éléments finis,
- I_H est l'ensemble des indices des nœuds enrichis par la fonction d'Heaviside.

- γ est une fonction cut-off C^2 définie à condition qu'il existe $0 < r_0 < r_1$ telle que

$$\begin{cases} \gamma(r) = 1 \text{ if } r < r_0, \\ 0 < \gamma(r) < 1 \text{ if } r_0 < r < r_1, \\ \gamma(r) = 0 \text{ if } r_1 < r. \end{cases} \tag{8}$$

➡ Le problème discrétisé s'écrit

$$\text{Trouver } u^h \in \vartheta^h \text{ tel que } a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in \vartheta^h. \tag{9}$$

4 Estimations d'erreur

Résultat de convergence

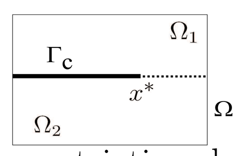
Theorem 4.1 *Supposons que le champ de déplacement u solution du problème (1) vérifie la condition (2), donc*

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq Ch\|u - \gamma u_s\|_{2+\epsilon,\Omega}, \tag{10}$$

où $C > 0$ est une constante générique indépandente du domaine.

Eléments de la preuve

- On divise Ω en deux sous domaines Ω_1 et Ω_2 (voir la figure ci-contre).



- On pose $u_{rd} = u - \gamma u_s$, et on désigne par u_k la restriction de u_{rd} sur Ω_k, $k \in \{1,2\}$.
- Soit $\widetilde{u_k}$ une extension de u_k à travers la fissure (voir [6]). L'extension $\widetilde{u_k}$ vérifie

$$\|\widetilde{u_k}\|_{2+\epsilon,\overline{\Omega}} \leq C_k\|u_k\|_{2+\epsilon,\Omega_k} \tag{11}$$

➡ Soit u un champ de déplacement satisfaisant (2) et $\widetilde{u_k}$ l'extension de u_k. On démontre (voir [8]) qu'il existe un élément unique $\Pi^h u$ de ϑ^h tel que

$$\Pi^h u = \begin{cases} I^h\widetilde{u_1} + \gamma u_s & \text{over } \ \Omega_1, \\ I^h\widetilde{u_2} + \gamma u_s & \text{over } \ \Omega_2, \end{cases} \tag{12}$$

I^h étant l'opérateur d'interpolation associé à la méthode classique.

Remarque Une construction similaire a été faite dans [5] permettant d'intérpoler la discontinuité à travers la fissure. L'intérêt de l'opérateur donné par (12) est de pouvoir gérer aussi la singularité.

On démontre aussi les trois lemmes suivants (voir [8])

- Il exite une constante C tel que pour tout triangle K totalement enrichi par H et pour tout u vérifiant (2), on a

$$\|u - \Pi^h u\|_{1,K\cap\Omega_k} \leq Ch_K\sigma_K\|u_k\|_{2+\epsilon,K}, \tag{13}$$

où $\rho_K = \{\sup(\text{diam}(B));\ B \text{ ball of } \mathbb{R}^2,\ B \subset K\}$ et $\sigma_K = h_K\rho_K^{-1}$

- Soit K^* le triangle contenant la pointe de la fissure. On a

$$\|u - \Pi^h u\|_{1,K^*} = Ch\sigma_K\|u - \gamma u_s\|_{2+\epsilon,K^*}. \tag{14}$$

- Soit K un triangle partiellement enrichi par H. On a

$$\|u - \Pi^h u\|_{1,K^*} = Ch\sigma_K\|u - \gamma u_s\|_{2+\epsilon,K^*}. \tag{15}$$

➡ En utilisant les résultats de convergences locales précédants et le lemme de Cea on obtient le résultat du théoreme 4.1.

5 Tests numériques

Les tests numériques sont effectués en utilisant la bibliothèque GETFEM++ (voir [7]) sous les hypothèses suivantes :

- Le domaine non fissuré $\overline{\Omega} = [-0.5; 0.5] \times [-0.5; 0.5]$,
- la fissure $\Gamma_C = [-0.5; 0] \times \{0\}$,
- la fonction cut-off $\gamma \in C^2(\Omega)$ est définie telle que

$$\begin{cases} \gamma(r) = 1 \text{ if } r < r_0 = 0.01, \\ \gamma(r) = 0 \text{ if } r > r_1 = 0.49, \end{cases}$$

et γ est identique à un polynôme du cinquième degré si $r_0 \leq x \leq r_1$,

- la méthode d'éléments finis est celle définie dans (7) sur $\mathcal{T}_h$.

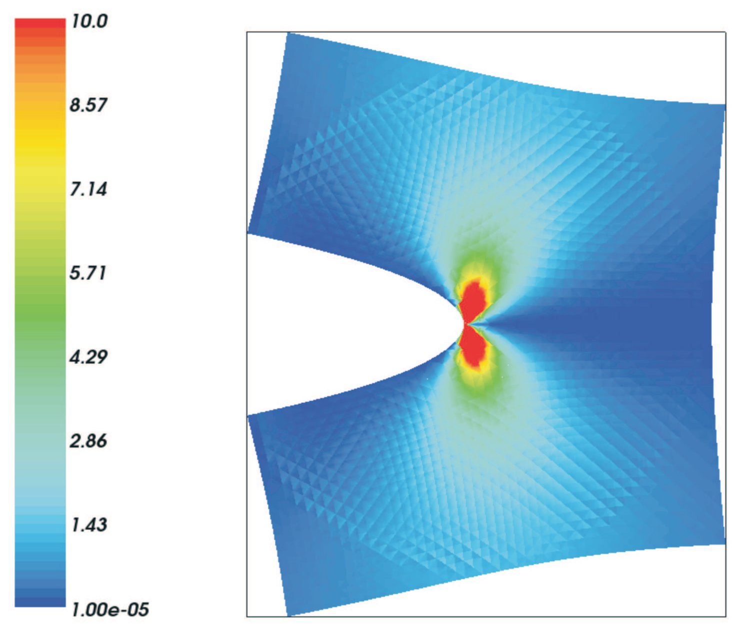


figure 1

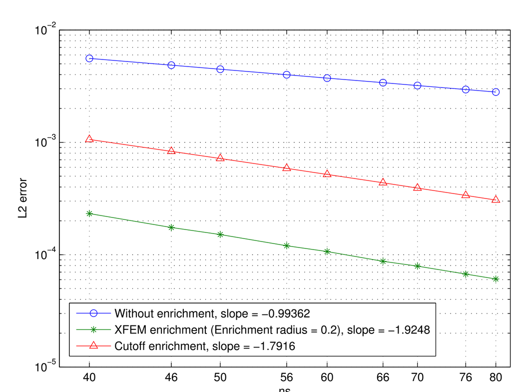
Remarque Si on diminue la différence $|r_1 - r_0|$, la fonction cut-off devient plus raide. Ceci va augmenter les erreurs commises parce que la fonction cut-off intervient dans $\|u - \gamma u_s\|_{2+\epsilon,\Omega}$ (voir théorème 4.1).

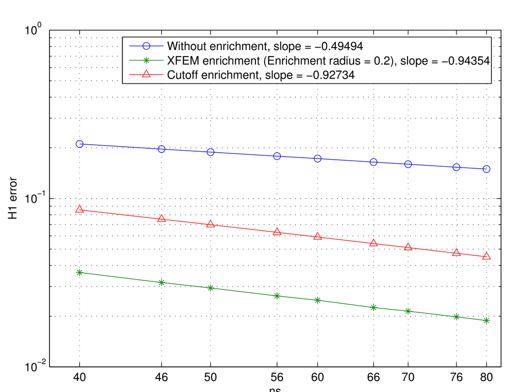
➡ La figure représente la contrainte de von Mises. La concentration de cette contrainte met en evidence la singularité au fond de la fissure.

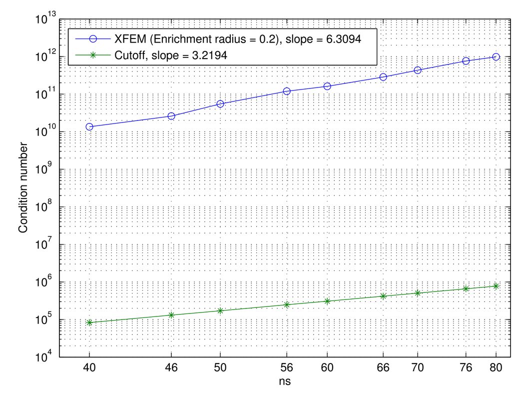
Les figures ci-dessous montrent une comparaison entre les vitesses de convergence de la methode d'éléments finis classique sans enrichissement, la méthode XFEM avec une zone fixe d'enrichissement et la méthode d'enrichissement avec une fonction cut-off.

➡ La méthode utilisant une fonction cut-off permet d'améliorer les vitesses de convergence de la méthode sans enrichissement (en h au lieu de $\sqrt{h}$). De plus, elle réduit les erreurs commises.

➡ La vitesse de convergence de la méthode XFEM avec une zone fixe d'enrichissement et de celle utilisant le cut-off sont quasiment les mêmes. Cette dernière permet de réduire le coût du calcul par rapport à la première où tous les nœuds d'une certaine zone fixe sont enrichis.







➡ La figure ci-contre montre que le conditionnement du système linéaire associé est meilleur avec la méthode utilisant le cut-off. Une des raisons est le caractère non-unisolvant de la méthode XFEM classique.

6 Conclusion

- L'analyse mathématique présentée au paragraphe 4 permet de traiter la transition entre l'enrichissement singulier et l'enrichissement par la fonction discontinue.
- Le résultat de convergence de la variante de XFEM proposée est quasi-optimal (en $H^{2+\epsilon}$) à cause de la présence du ϵ. Ceci est une difficulté strictement technique.
- L'analyse mathématique de la méthode XFEM avec une zone fixe d'enrichissement (sans fonction cut-off) reste un problème ouvert.

Références :

[1] E. Chahine, P. Laborde, Y. Renard *C. R. Acad. Sci., Paris*, , Ser. I 342, 2006, 527-532.
[2] P. Laborde, Y. Renard, J. Pommier, M. Salaun *High Order Extended Finite Element Method For Cracked Domains*, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 64, 2005, 354-381.
[3] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko *A finite element method for crack growth without remeshing*, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 46, 1999, 131-150.
[4] P. Grisvard *Singularities in boundary value problems*, Masson, 1992.
[5] A. Hansbo, P. Hansbo *A Finite Element Method for the Simulation of Strong and Weak Discontinuities in Solid Mechanics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 193, 3523-3540,2004.
[6] R. A. Adams *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.
[7] J. Pommier, Y. Renard *Getfem++, an open source generic C++ library for finite element methods*, http ://www-gmm.insa-toulouse.fr/getfem.
[8] E. Chahine, P. Laborde, Y. Renard *Crack tip enrichement in the XFEM method using a cut-off function, en préparation.*