

# Une équation intégrale stabilisée pour la résolution itérative de problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques

ALOUGES F. 1, BOREL S. 1,2, LEVADOUX D. 2

1: Université Paris Sud 11, Laboratoire de Mathématiques, bât 425, 91405 Orsay cedex, France

2: ONERA, DEMR-FUR, Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau cedex, France

## Objectif

Construire une nouvelle équation intégrale de frontière :

- qui modélise le problème de Maxwell harmonique avec condition de Silver-Müller à l'infini et condition au bord d'un parfait conducteur
- dont la discrétisation conduite à un système linéaire bien conditionné (contrairement à ce qui est habituellement observé)

## Equations intégrales classiques pour le problème de Maxwell harmonique

( $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$ ) étant donné, trouver ( $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ) tel que :

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\Gamma} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_i)|_{\Gamma} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} ((\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{x} - ik|x|\mathbf{E}) = 0 \end{cases}$$

2 potentiels intégraux satisfont l'équation de Maxwell et la condition à l'infini :

$$Lu = \frac{1}{ik} \nabla \times \nabla \times G * u$$

$$Ku = \nabla \times G * u$$

( $G$  = solution fondamentale de l'équation de Helmholtz)

Deux catégories d'équations intégrales:

### Equations en champs

- basées sur la formule de représentation des champs de Stratton-Chu
- $\mathbf{E} = L(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\Gamma}) - K(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\Gamma})$
- L'inconnue est toujours de nature physique

Exemples: EFIE, MFIE, CFIE

### Equations en sources

- basées sur le choix d'un potentiel de paramétrisation des champs
- $\mathbf{E} = Vu - \mathbf{n} \times \nabla_{\Gamma} u = -\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_i)|_{\Gamma}$
- L'inconnue n'est pas forcément de nature physique

Exemple: CSIE

### Problématique:

Aucune de ces équations n'est à la fois

- bien posée quelle que soit la fréquence
- basée sur une perturbation compacte d'un opérateur d'ordre 0 de type Fredholm d'indice 0

## L'équation en sources combinées généralisée

Potentiel de paramétrisation:  $V = LY^+ - K$

$$\mathbf{n} \times (L_{\Gamma} Y^+ - K_{\Gamma}) u = -\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_i)|_{\Gamma} \quad (\text{GCSIE})$$

Choix de l'opérateur de couplage  $Y^+$  :

Si  $Y^+$  est choisi comme l'admittance de  $\Gamma$ , alors  $\mathbf{n} \times (L_{\Gamma} Y^+ - K_{\Gamma}) = \text{Id}$  et il n'y a plus d'équation à résoudre.

**Ideé:** construire des modèles d'approximation de l'admittance

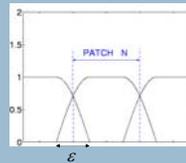
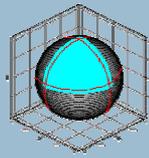
On considère des problèmes à **haute fréquence**

On utilise la **localisation** du phénomène de diffraction

### A haute fréquence:

$$Y^+ = -2 \sum_n \chi_n L \chi_n$$

Si  $\Gamma$  est le plan infini,  $L$  est l'admittance de  $\Gamma$ .  
 $\chi_n$  = fonction de troncature  $C^\infty$  vérifiant  $\sum_n \chi_n^2 = 1$

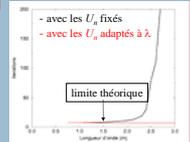


### Théorème:

L'équation GCSIE est bien posée dans  $L^2(\Gamma)$  sous la condition

$$\max_x \sum_n |\nabla_{\Gamma} \chi_n(x)|^2 < 2k^2$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{\lambda}{4}$$



## Discrétisation et propriétés de la GCSIE pour la résolution itérative

### Discrétisation des opérateurs:

Méthode de Galerkin  $\begin{cases} [\mathbf{n} \times L_{\Gamma}]_{ij} = \langle \mathbf{n} \times L_{\Gamma} \varphi_i, \varphi_j \rangle \\ [\mathbf{n} \times K_{\Gamma}]_{ij} = \langle \mathbf{n} \times K_{\Gamma} \varphi_i, \varphi_j \rangle \end{cases}$

Problème:  $Y^+(X_h) \notin X_h$

$$Y^+ = -2 \sum_n \chi_n (\mathbf{n} \times G + \mathbf{n} \times \nabla G \cdot \mathbf{n}) \chi_n$$

$$\tilde{Y}^+ = -2 \sum_n \chi_n (\Pi_a \mathbf{n} \times G + \mathbf{n} \times \nabla \Pi_s G \cdot \mathbf{n}) \chi_n$$

$\Pi_a$  interpolateur sur les fonctions de base de RT  
 $\Pi_s$  interpolateur sur les fonctions scalaires  $P^1$

### Coût des produits matrice-vecteur:

$$[\text{Id}]^{-1} ([\mathbf{n} \times L_{\Gamma}] [Y^+] - [\mathbf{n} \times K_{\Gamma}]) [U]$$

- 2 produits proches
- 1 produit lointain FMM
- 1 produit creux
- 1 inversion de la matrice de masse

**Total: 59-70 \* Cp**

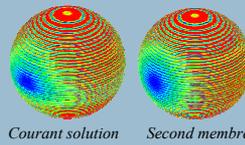
(Cp=coût d'un produit proche)

contre **51-61 \* Cp** pour la CFIE

et **66-121 \* Cp** pour la PCFIE

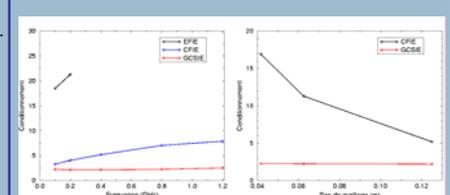
### Qualité d'approximation de l'admittance:

Si  $Y^+$  = admittance de  $\Gamma$ , alors  $\mathbf{n} \times (L_{\Gamma} Y^+ - K_{\Gamma}) = \text{Id}$  et le courant solution est égal au second membre.



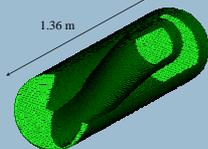
### Conditionnement spectral des systèmes linéaires:

En fonction de la fréquence      En fonction du pas de l'espace

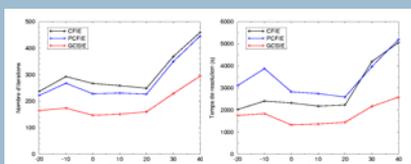
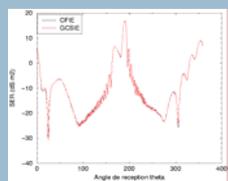


## Application de la GCSIE à la résolution de problèmes de diffraction à haute fréquence

Obstacle: **cavité "Channel"** modélisant l'entrée d'air d'un avion



Courbe de SER:  
 Fréquence: 5 GHz  
 $(n_{\lambda} = 22.67)$   
 153 033 ddl

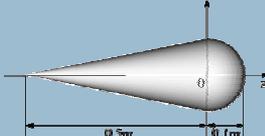


Fréquence: 7 GHz  
 $(n_{\lambda} = 31.73)$   
 309 711 ddl

- Gain en temps de résolution:
- 40% par rapport à la CFIE
  - 50% par rapport à la PCFIE

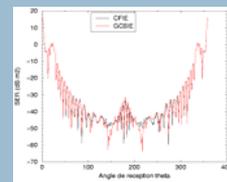
Obstacle: **cone-sphère**

Fréquence: 27 GHz ( $n_{\lambda} = 59.4$ )  
 258 384 ddl



- Gain en temps de résolution:
- 75% par rapport à la CFIE
  - 52% par rapport à la PCFIE

Courbe de SER:



Courbe de convergence:

