

Introduction

Afin de comprendre l'influence de la **géométrie** du matériau sur l'**apparition de la supraconductivité** modélisée par la théorie de **Ginzburg-Landau**, il faut déterminer précisément le comportement des **modes propres de l'opérateur de Schrödinger** $-(\hbar\nabla - i\mathcal{A})^2$ avec potentiel magnétique \mathcal{A} et paramètre semi-classique \hbar lorsque $\hbar \rightarrow 0$.

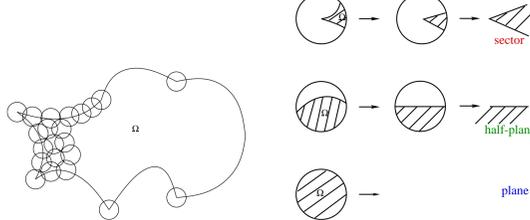
Cadre

Ω domaine borné du plan,
 $\mathcal{A}_0 = \frac{1}{2}(-x_2, x_1)$ potentiel magnétique de champ constant,
 \hbar paramètre semi-classique ($\hbar \rightarrow 0$),
 P_\hbar $-(\hbar\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ avec condition de Neumann,
 $(\mu_{h,n}, u_{h,n})$ n^{e} mode propre de P_\hbar .

$$P_\hbar = -\hbar^2\Delta - i\hbar(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}) + \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2) \quad \text{et c.l. Neumann.}$$

Opérateurs modèles

Technique de localisation :



Opérateurs modèles :

- $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur le plan \mathbb{R}^2 ,
 - $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur le demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$,
 - $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur les secteurs G^α d'angles $\alpha \in (0, 2\pi)$,
- $$G^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0, 0 < x_2 < x_1 \tan \alpha\}.$$

Plan et demi-plan

- ◊ La plus petite valeur propre de $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur \mathbb{R}^2 vaut 1 [Landau].
- ◊ Le bas du spectre de $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ vaut $\Theta_0 \simeq 0.59$ [Bolley, Dauge-Helffer].

Applications : Si Ω est régulier,

- ▷ comportement de la première valeur propre quand $\hbar \rightarrow 0$

$$\frac{\mu_{h,1}}{\hbar} \rightarrow \Theta_0,$$

- ▷ concentration du premier mode propre $u_{h,1}$ au(x) point(s) de courbure maximale [Bernoff-Sternberg, Helffer-Morame, Lu-Pan, Fournais-Helffer].

Secteurs angulaires

Q^α opérateur $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur G^α ,
 $(\mu_k(\alpha), \Psi_k^\alpha)$ k^{e} mode propre de Q^α .

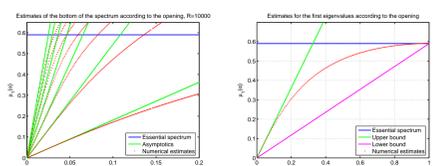
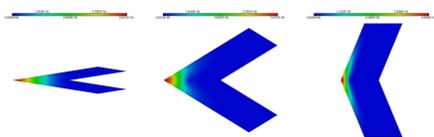
- ◊ Le bas du spectre du spectre essentiel de Q^α vaut Θ_0 .
- ◊ Soit $0 < k \leq K_\alpha = \max\{k \in \mathbb{N} \mid \mu_k(\alpha) < \Theta_0\}$ et $\varepsilon > 0$,

$$e^{(\sqrt{\Theta_0 - \mu_k(\alpha) - \varepsilon})|x|} \Psi_k^\alpha(x) \in H_{Q^\alpha}^1.$$

- ◊ Pour $\alpha \in (0, \pi/2]$, $\mu_1(\alpha) < \Theta_0$.

- ◊ Pour $\alpha \in (0, \pi]$, $\frac{\Theta_0}{\pi} \leq \frac{\mu_1(\alpha)}{\alpha} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

- ◊ Quand $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{\mu_k(\alpha)}{\alpha} \rightarrow \frac{2k+1}{\sqrt{3}}$.



Conjectures : μ_1 croît strictement de $(0, \pi]$ vers $(0, \Theta_0]$, est constant égal à Θ_0 sur $[\pi, 2\pi]$.
 Il n'y a qu'une valeur propre $< \Theta_0$ dès que $\alpha \geq \frac{\pi}{5}$.

Carré

Ω_{sq} carré de sommets $s_1 = (-1, -1)$, $s_2 = (1, -1)$, $s_3 = (1, 1)$ et $s_4 = (-1, 1)$.

Développement asymptotique

Les 4 premiers modes propres de P_\hbar découlent de 4 quasi-modes, localisés aux sommets, construits à partir du mode $(\mu_1(\pi/2), \Psi_1^{\pi/2})$ du quart de plan.

Construction des quasi-modes

- ◊ **Transport** de $\Psi_1^{\pi/2}$ en chaque sommet (translation en s_j , rotation \mathcal{R}_j , changement de jauge) :

$$\check{\psi}_{h,s_j}(x) = \frac{\exp\left(\frac{-ix \wedge s_j}{2\hbar}\right) \Psi_1^{\pi/2}\left(\frac{\mathcal{R}_j(x - s_j)}{\sqrt{\hbar}}\right)}{\sqrt{\hbar}} \quad \text{sur } \mathcal{R}_j^{-1}G^{\pi/2}.$$

- ◊ **Troncature** : $\psi_{h,s_j}(x) = \chi_j(x)\check{\psi}_{h,s_j}(x)$ sur Ω_{sq} .

- ◊ **Espace de quasi-modes** :

$$E_h = \text{Vect}\{\psi_{h,s_1}, \psi_{h,s_2}, \psi_{h,s_3}, \psi_{h,s_4}\}.$$

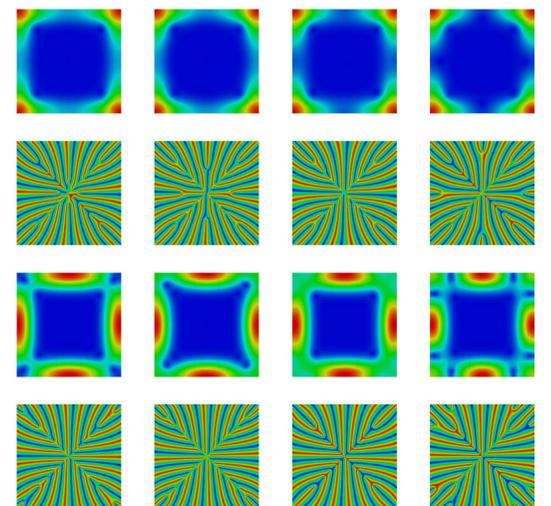
Approximation des modes propres de P_\hbar

$$F_h = \text{Vect}\{u_{h,1}, u_{h,2}, u_{h,3}, u_{h,4}\}.$$

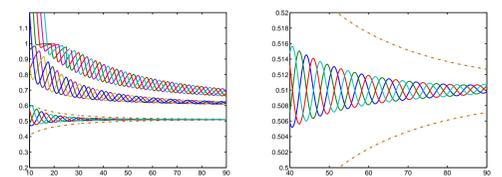
Théorème. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que pour $n = 1, 2, 3, 4$,

$$\left| \mu_{h,n} - \hbar \mu_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| + d(E_h, F_h) \leq C_\varepsilon \exp\left(\frac{-2\sqrt{\Theta_0 - \mu_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + \varepsilon}}{\sqrt{\hbar}}\right).$$

Simulations numériques

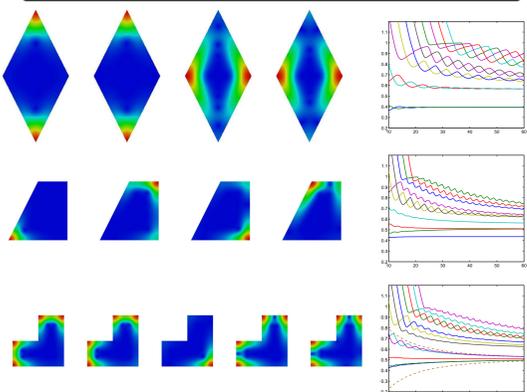


Modules et phases de $u_{h,n}$, $n = 1, \dots, 8$, $h = 0.02$.



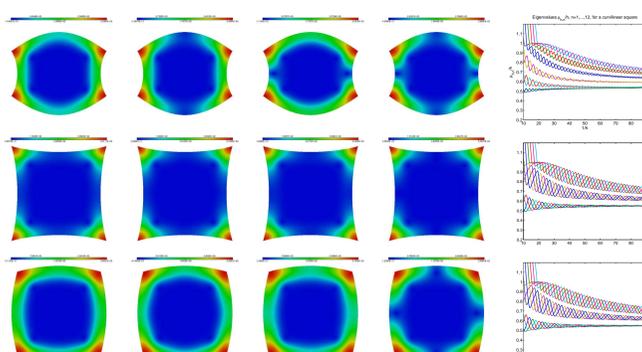
$h^{-1}\mu_{h,n}$ vs. h^{-1} , $n = 1, \dots, 12$.

Autres polygones



Polygones courbes

Le développement asymptotique est ici en puissances de $\sqrt{\hbar}$.



Applications

Si la section du matériau présente des coins, alors la supraconductivité apparaît d'abord dans les **plus petits angles**, visite progressivement tous les **sommets** puis le **bord du domaine** et enfin gagne l'**intérieur**.

Références

- [1] V. BONNAILLIE On the fundamental state energy for a Schrödinger operator with magnetic field in domains with corners. *Asymptot. Anal.* 41, 3-4 (2005), 215-258.
- [2] V. BONNAILLIE-NOËL AND M. DAUGE Asymptotics for the low-lying eigenstates of the Schrödinger operator with magnetic field near corners. *Ann. Henri Poincaré*, in press (2006).
- [3] V. BONNAILLIE-NOËL, M. DAUGE, D. MARTIN AND G. VIAL Computations of the first eigenpairs for the Schrödinger operator with magnetic field. *Prépublications IRMAR 05-37* (2005).
- [4] MARTIN, D. The finite element library Mélima. <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina> (2005).