

Valeurs propres de l'opérateur de Maxwell et IRM

Patrice Boissoles

Institut de Recherche Mathématique de Rennes
ENS Cachan, antenne de Bretagne



IRMAR

UNIVERSITÉ DE
RENNES 1

Monique Dauge

Institut de Recherche Mathématique de Rennes
Université de Rennes 1

Problématique étudiée

Lors d'examens IRM en présence d'objets métalliques, des élévations de température de ceux-ci ont été constatées. Ces élévations peuvent être importantes : une hausse de 60° a été mise en évidence lors d'une expérimentation (voir [1]).

Les principaux objets métalliques concernés sont les cathéters (tuyau métallique souple permettant de guider les instruments lors des IRM interventionnelles) et les câbles de monitoring (pour mesurer la pulsation cardiaque du patient par exemple).



Fig. 1 : exemple d'appareil IRM

Le but de ce travail est la modélisation mathématique et la mise en évidence numérique du phénomène d'échauffement des objets métalliques utilisés lors des examens IRM

Modélisation mathématique

Le champ magnétique $h = h_{tot} - \bar{h}$ est solution de l'équation (1)
$$\begin{cases} h \in \mathbb{H}(\text{rot}; \Omega) \cap \mathbb{H}_0(\text{div}; \Omega), \\ \text{rot} \left(\frac{1}{\sigma - i\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega} \text{rot} h \right) - i\mu\omega h = i\mu\omega \bar{h}, \end{cases}$$

où \bar{h} désigne le champ magnétique de l'antenne et h_{tot} le champ magnétique total.

Théorème 1 : sans métal

Soit Ω un cylindre homogène de rayon R et longueur l . Pour $n \in \mathbb{Z}$, les modes TE d'ordre n sont associés aux valeurs propres :

$$(2) \quad \left(\frac{z_{n,j}^{neu}}{R} \right)^2 + \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad j \geq 1, k \geq 1,$$

où $z_{n,j}^{neu}$ désignent les zéros positifs de J'_n .

Pour $n \in \mathbb{Z}$, les modes TM d'ordre n sont associés aux valeurs propres :

$$(3) \quad \left(\frac{z_{n,j}^{dir}}{R} \right)^2 + \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad j \geq 1, k \geq 0,$$

où $z_{n,j}^{dir}$ désignent les zéros positifs de J_n .

Théorème 2 : conducteur parfait

Soit Ω un cylindre homogène de rayon R et de longueur l avec un trou circulaire coaxial de rayon $r_0 < R$.

Les modes TE et TM convergent vers ceux du cylindre sans trou lorsque r_0 tend vers 0.

En raison du trou, des modes TEM existent. Ceux-ci sont d'ordre 0 et sont associés aux valeurs propres indépendantes de R et de r_0 suivantes :

$$(4) \quad \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad k \geq 0.$$

Remarque 3 La longueur l correspond à la demi-longueur d'onde du premier mode TEM non nul.

Le spectre de l'opérateur associé à (1) correspond aux longueurs de l'objet métallique entraînant un échauffement important de celui-ci dû à la résonance du champ magnétique.

Simulations numériques (éléments finis de haut degré avec la bibliothèque d'éléments finis Mélina [4])

L'antenne IRM considérée est une antenne cage d'oiseau (voir Fig. 1) possédant 16 branches, un rayon de 4,45 cm et mesurant 12,8 cm de long.

L'objet métallique est un cylindre de 1cm de rayon dont l'axe est décalé de ρ cm par rapport à celui de l'antenne.

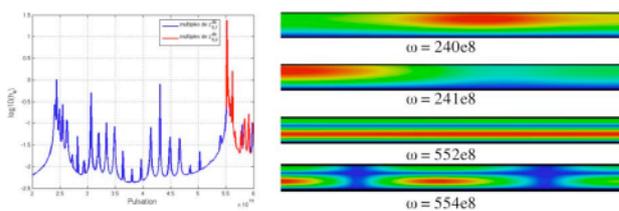


Fig. 2 : cas sans métal

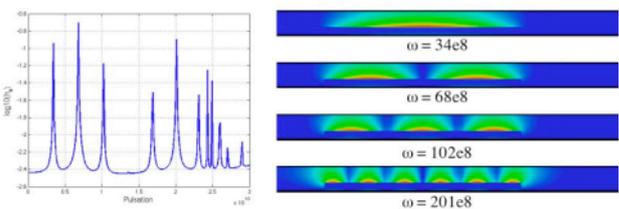


Fig. 3 : cas avec métal

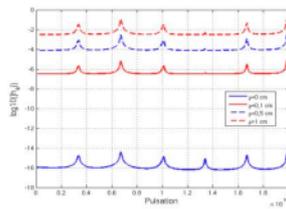


Fig. 4 : influence de ρ

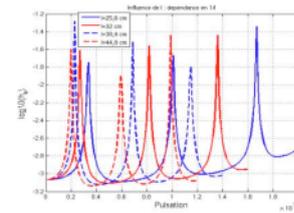


Fig. 5 : influence de la longueur du métal

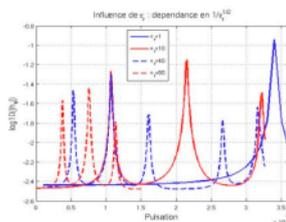
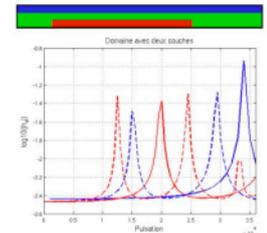


Fig. 6 : influence de ε

En cours Situations réalistes



Références :

- [1] Konings et al., Heating Around Intravascular Guidewires by Resonating RF Waves. JMRI, 12
- [2] Bernardi, Dauge et Maday, Spectral methods for Axisymmetric Domains, Gauthiers-Villars, 1999
- [3] Costabel et Dauge, Maxwell eigenmodes in tensor product domains, 2006
- [4] Martin, Melina, bibliothèque de calculs éléments finis, <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin>