

Le 60^{ème} de Michel CROUZEIX
2 Juin 2006

**L'équation de Helmholtz dans un demi-espace
avec condition d'impédance**

M. DURAN & I. MUGA & Jean-Claude NÉDÉLEC

CMAP, École Polytechnique, & PUC Santiago de Chile

- **Le problème avec impédance dans \mathbb{R}_+^3** 3
- **La fonction de Green** 4
- **Les conditions de radiation.** 11
- **Unicité et existence** 20
- **Théorème d'existence.** 36
- **Extensions** 38
- **L'extérieur d'une demi-sphère.** 39
- **Le domaine perturbé** 50

1 – Le problème avec impédance dans \mathbb{R}_+^3

On considère un problème acoustique dans un demi-espace de \mathbb{R}_+^3 .

$\mathbb{R}_+^3 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$. La pression acoustique u satisfait l'équation de Helmholtz. La condition limite sur la frontière est une condition d'impédance. Le problème s'écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^3 \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - zu = f & \text{sur } \{x_3 = 0\}, \\ f \text{ a un support compact,} & \end{array} \right. \quad (1)$$

où z est l'impédance et k le nombre d'onde. La normale \mathbf{n} est orientée vers l'extérieur, et donc $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ devient $-\frac{\partial u}{\partial x_3}$.

Il faut ajouter outre un cadre fonctionnel adéquat, des conditions de radiation dont l'expression résulte de l'étude de la fonction de Green.

2 – La fonction de Green

Le point source est $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}_+^3$ et on peut choisir $y_1 = y_2 = 0$.

Formellement, elle satisfait

$$\begin{cases} \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + k^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) & \text{dans } \mathbf{R}_+^3 \\ \frac{\partial G}{\partial x_3} + zG = 0 & \text{sur } \{x_3 = 0\}. \end{cases} \quad (2)$$

On choisit une valeur complexe de k , i.e $k = k_0 + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

La condition de radiation est liée à l'asymptotique à l'infini de la fonction de Green correspondant à $k = k_0$, obtenue quand ε tend vers zéro.

Ce problème présente des ondes de surface cylindriques quand z est réel non nul, ce qui se traduit par l'apparition de singularités sur l'axe réel dans la transformée de Fourier de la fonction de Green.

Le calcul de la fonction de Green

La fonction $G_{y_3}(x)$ est paire en les variables (x_1, x_2) et sa transformée de Fourier en ces variables est paire en les variables (ξ_1, ξ_2) .

$G_y(x)$ a une singularité au point x du type $1/r$ (celle du Laplacien)

$$r^2 = (|y_1 - x_1|^2 + |y_2 - x_2|^2 + |y_3 - x_3|^2) \quad (3)$$

Formellement le calcul est le suivant

- Transformée de Fourier en (x_1, x_2) et passage en coordonnées polaires
- Résolution du système d'ODEs
- Transformée de Fourier inverse en polaire et coordonnées sphériques

La transformée de Fourier en (x_1, x_2) conduit à l'équation en x_3 :

$$\frac{\partial^2 \hat{G}}{\partial x_3^2} + (k^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2) \hat{G} = \frac{1}{2\pi} \delta_{y_3} \quad \{x_3 > 0\}. \quad (4)$$

On utilise alors les coordonnées polaires suivantes (inhabituelles) :

$$\xi = \begin{cases} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} & \text{quand } \xi_2 > 0 \\ \xi_1 & \text{if } \xi_2 = 0 \text{ and } \psi = \cotg^{-1} \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \right) \\ -\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} & \text{quand } \xi_2 < 0 \end{cases}. \quad (5)$$

Le plan (ξ_1, ξ_2) correspond au domaine $\xi \in]-\infty, +\infty[$ et $\psi \in [0, \pi[$.

Dans chaque domaine \hat{G} est une combinaison linéaire de la forme :

$$\hat{G}(\xi, x_3, y_3) = \begin{cases} Ae^{\sqrt{\xi^2 - k^2} x_3} + Be^{-\sqrt{\xi^2 - k^2} x_3}, & \{\mathbf{x} \in \mathbf{IR}_+^3 : x_3 < y_3\}, \\ Ce^{\sqrt{\xi^2 - k^2} x_3} + De^{-\sqrt{\xi^2 - k^2} x_3}, & \{\mathbf{x} \in \mathbf{IR}_+^2 : x_3 > y_3\}. \end{cases} \quad (6)$$

Les fonctions A, B, C and D dépendent de ξ et de y_3 .

Racine carrée complexe.

Nous avons besoin d'une définition précise de la fonction **racine carrée complexe**

$$\xi \longmapsto \sqrt{\xi^2 - k^2}. \quad (7)$$

dans l'expression de la fonction de Green.

On définit $\sqrt{\xi^2 - k^2}$ comme le produit de $\sqrt{\xi - k}$ et $\sqrt{\xi + k}$ qui sont définis (via le Log complexe) dans les régions de la figure 1. Alors, la fonction racine carrée complexe (7) est paire et analytique dans l'intersection $D_1 \cap D_2$ (voir Fig.1).

Observation

Avec cette détermination, la fonction $e^{-\sqrt{\xi^2 - k^2} y}$ est paire et exponentiellement décroissante quand $y \rightarrow +\infty$.

Détermination de la racine carrée

Avec le choix (5) des coordonnées polaires, le choix convenable de la racine carrée complexe est exactement le même en bi-dimensionnel et en tridimensionnel.

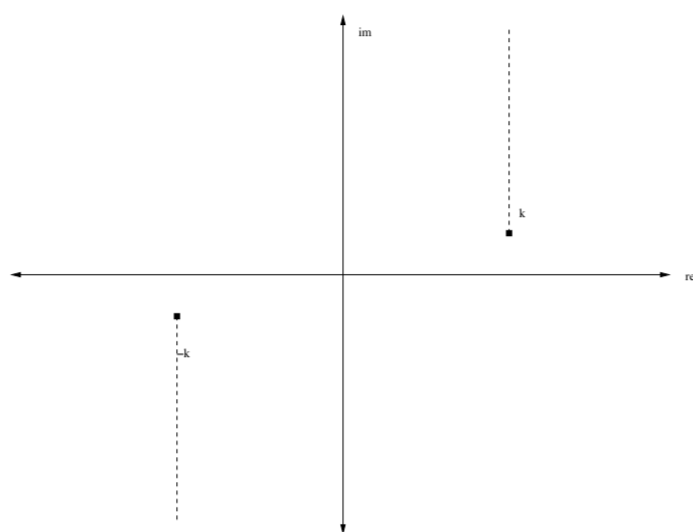


FIG. 1 – *Domaine de la racine carrée complexe (7)*

La fonction de Green spectrale \hat{G} est :

$$\left\{ \hat{G}(\xi, x_3, y_3) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{z + \sqrt{\xi^2 - k^2}}{z - \sqrt{\xi^2 - k^2}} \frac{e^{-\sqrt{\xi^2 - k^2}(x_3 + y_3)}}{\sqrt{\xi^2 - k^2}} - \frac{e^{-\sqrt{\xi^2 - k^2}|x_3 - y_3|}}{\sqrt{\xi^2 - k^2}} \right) \right. \quad (8)$$

Remarque 1 La fonction de Green spectrale donnée par l'équation (8) est continue au point $\xi = \pm k$. Elle s'écrit $\hat{G}(\xi, x_3, y_3) = H(g(\xi))/g(\xi)$, où $H(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{z + \omega}{z - \omega} e^{-\omega(x_3 + y_3)} - e^{-\omega|x_3 - y_3|} \right)$ et $g(\xi) = \sqrt{\xi^2 - k^2}$. Comme $H(\omega)$ est une fonction analytique en $\omega = 0$, la valeur de \hat{G} en $\xi = \pm k$ est $\hat{G}(\pm k, x_3, y_3) := H'(0)$.

La transformée de Fourier inverse en coordonnées polaires (5), donne l'expression de la fonction de Green spatiale (le point source est (y_1, y_2))

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{\mathbf{R}} \hat{G}(\xi, x_3, y_3) |\xi| e^{-i\xi[(x_1 - y_1)\cos\psi + (x_2 - y_2)\sin\psi]} d\xi d\psi. \quad (9)$$

On introduit les coordonnées sphériques dans les variables spatiales :

$$\begin{cases} x_1 - y_1 = r \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 - y_2 = r \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 - y_3 = r \cos \theta. \end{cases} \quad (10)$$

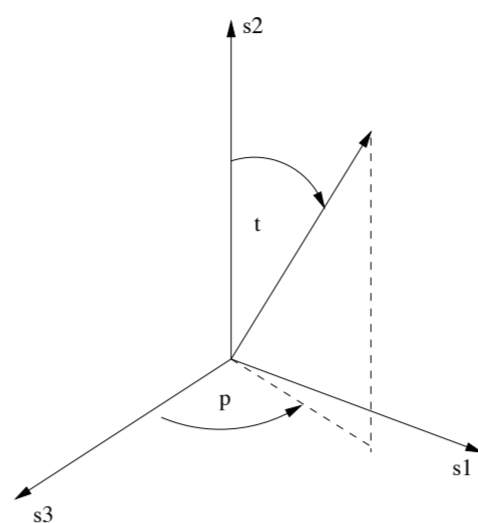


FIG. 2 – *Coordonnées sphériques*

L'intégrale (9) se réduit à

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} \hat{G}(\xi, x_3, y_3) |\xi| e^{-i\xi r \sin \theta \cos(\psi - \varphi)} d\xi d\psi. \quad (11)$$

3 – Les conditions de radiation.

Les conditions de radiation du problème (1), sont celles du comportement asymptotique à l'infini de la fonction de Green spatiale (quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, k tend vers une valeur réelle). Nous cherchons donc les asymptotiques de l'expression intégrale (11), quand $r \rightarrow +\infty$.

A cause de la valeur absolue, les fonctions intégrandes se comportent différemment selon que $x_3 - y_3 > 0$, ou $x_3 - y_3 \leq 0$.

Dans le premier cas, pour tout angle $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ et toute valeur de r , le point $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ appartient au demi-espace \mathbf{R}_+^3 et le champ lointain est associé à r .

Dans le second cas, le champ lointain est associé à $\rho \rightarrow +\infty$.

$$\rho = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \quad (12)$$

On attend donc deux contributions dans le champ lointain.

Analyse asymptotique.

Comme $k > 0$, la racine carrée dans l'exponentielle qui définit \hat{G} est imaginaire pure pour $|\xi| < k$ et réelle pour $|\xi| \geq k$. On coupe donc l'expression (11) en deux parties :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{-k}^k \hat{G}(\xi, x_3, y_3) |\xi| e^{-i\xi r \sin \theta \cos(\psi-\varphi)} d\xi d\psi \\ \text{et} \\ G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{|\xi| \geq k} \hat{G}(\xi, x_3, y_3) |\xi| e^{-i\xi r \sin \theta \cos(\psi-\varphi)} d\xi d\psi. \end{array} \right. \quad (13)$$

La phase stationnaire dans \mathbb{R}^n .

Cette technique donne l'évaluation, ($\lambda \rightarrow +\infty$), des intégrales de la forme

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(\xi)} u(\xi) d\xi. \quad (14)$$

La phase ϕ est une fonction régulière et u a un support compact dans \mathbb{R}^n . Ces intégrales tendent vers zéro très rapidement avec λ , excepté aux points où le gradient $\nabla\phi$ de la phase est nul et la matrice Hessienne $\mathbf{H}_\phi(\xi)$ inversible (points stationnaires). En un tel point ξ^e , la contribution principale est

$$I(\lambda) = e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}(\mathbf{H}_\phi(\xi^e))} - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{e^{i\lambda\phi(\xi^e)}}{\sqrt{|\det \mathbf{H}_\phi(\xi^e)|}} (u(\xi^e) + O(\lambda^{-1})), \quad (15)$$

où $\text{sgn}(\mathbf{H}_\phi)$ est la signature de la matrice Hessienne. Voir par exemple [5].

L'expression de $G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une intégrale sur le cercle de rayon k noté B_k .

Lorsque $x_3 - y_3 > 0$, nous écrivons

$$\begin{cases} G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{B_k} \left(\frac{z - i\sqrt{k^2 - \xi^2}}{z + i\sqrt{k^2 - \xi^2}} e^{2i\sqrt{k^2 - \xi^2} y_3 - 1} \right) \frac{i e^{ir\phi(\xi_1, \xi_2)}}{8\pi^2 \sqrt{k^2 - \xi^2}} d\xi_1 d\xi_2, \\ \phi(\xi_1, \xi_2) := \sqrt{k^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \cos \theta - \xi_1 \sin \theta \cos \varphi - \xi_2 \sin \theta \sin \varphi. \end{cases} \quad (16)$$

La phase ϕ a un seul point stationnaire (intérieur à B_k) qui est

$$(\xi_1^e, \xi_2^e) = (-k \sin \theta \cos \varphi, -k \sin \theta \sin \varphi). \quad (17)$$

On obtient le développement en champ lointain de (16),

$$G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{z - ik \cos \theta}{z + ik \cos \theta} e^{2ik \cos \theta y_3 - 1} \right) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + o(r^{-2}), \quad x_3 - y_3 > 0, r \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Cette partie de la fonction de Green est associée au comportement classique d'ondes sortantes. Sa partie principale s'annule au voisinage de la surface.

Dans l'expression de $G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, donnée par (13), l'intégrale radiale comporte deux pôles aux points $\xi = \sqrt{z^2 + k^2}$ et $\xi = -\sqrt{z^2 + k^2}$. Le premier a une partie réelle et une partie imaginaire positive quand ε est non nul. Il donne donc une contribution dans le calcul de résidu lors du changement de contour. Ce changement de contour est fixé par la décroissance exponentielle quand $|\xi| \rightarrow +\infty$ dans la zone entre l'axe réel et le nouveau contour.

Pour $R \in \mathbf{R}$ grand, et $\xi = Re^{i\omega}$ avec $\omega \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, la racine carrée se comporte comme

$$\lim_{|R| \rightarrow \infty} \sqrt{(Re^{i\omega})^2 - k^2} = \lim_{|R| \rightarrow \infty} |R|e^{i\omega}. \quad (19)$$

Le facteur exponentiel est alors en

$$\exp \left[-|R|e^{i\omega} |x_3 - y_3| - iRe^{i\omega} r \sin \theta \cos(\psi - \varphi) \right]. \quad (20)$$

On cherche une décroissance exponentielle indépendamment des valeurs de $|x_3 - y_3|$.

On utilise donc un chemin dans le plan complexe supérieur quand $\cos(\psi - \varphi)$ est négatif ou nul et un chemin dans le plan complexe inférieur quand $\cos(\psi - \varphi)$ est positif.

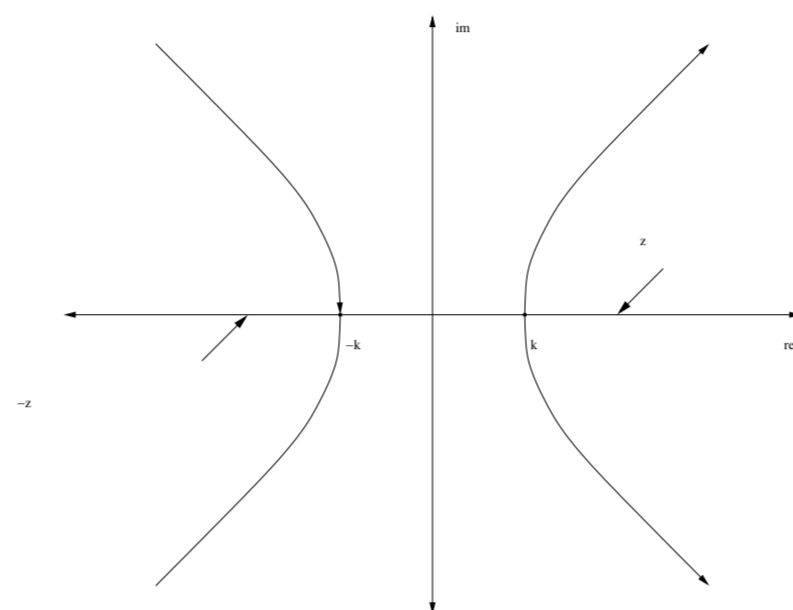


FIG. 3 – *Chemins d'intégration et pôles*

Quand $\cos(\psi - \varphi) \leq 0$, le pôle actif est $\xi_1 = \sqrt{z^2 + k^2}$ et sa contribution est

$$2\pi i \operatorname{Res}_{\xi=\xi_1} \left(\hat{G} |\xi| e^{-i\xi r \sin \theta \cos(\psi - \varphi)} \right) = \frac{z}{i} e^{-z(x_3 + y_3)} e^{-i\sqrt{z^2 + k^2} r \sin \theta \cos(\psi - \varphi)}.$$

Quand $\cos(\psi - \varphi) > 0$, le pôle actif est $\xi_1 = -\sqrt{z^2 + k^2}$ et sa contribution est

$$-2\pi i \operatorname{Res}_{\xi=\xi_2} \left(\hat{G} |\xi| e^{-i\xi r \sin \theta \cos(\psi - \varphi)} \right) = \frac{z}{i} e^{-z(x_3 + y_3)} e^{i\sqrt{z^2 + k^2} r \sin \theta \cos(\psi - \varphi)}.$$

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{|\xi| \geq k} \hat{G} |\xi| e^{-i\xi r \sin \theta \cos(\psi - \varphi)} d\xi d\psi \\ = \frac{z e^{-z(x_3 + y_3)}}{2\pi i} \int_0^\pi e^{i\sqrt{z^2 + k^2} r \sin \theta |\cos(\psi - \varphi)|} d\psi + R(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{array} \right. \quad (21)$$

où $R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une intégrale en ψ sur $[0, \pi]$, et en ξ sur le nouveau contour.

On utilise la variable radiale ρ définie par

$$\rho := r \sin \theta = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \quad (22)$$

L'intégrale de droite dans l'égalité (21) est indépendante de la variable angulaire φ . On peut donc choisir $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $|\cos(\psi - \varphi)| = \sin \psi$.

Cette partie est celle associée à l'onde de surface que nous écrivons

$$sw(\rho, x_3) := \frac{ze^{-z(x_3+y_3)}}{2\pi i} \int_0^\pi e^{i\rho\sqrt{z^2+k^2} \sin \psi} d\psi. \quad (23)$$

La phase stationnaire donne le champ lointain de $sw(\rho, x_3)$. Le point stationnaire est $\psi = \frac{\pi}{2}$ et le développement asymptotique ($\rho \rightarrow \infty$) est

$$sw(\rho, x_3) = \frac{ze^{-z(x_3+y_3)}}{i\sqrt{2\pi}(z^2+k^2)^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{e^{i(\sqrt{z^2+k^2}\rho - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\rho}} + o(\rho^{-\frac{3}{2}}) \right). \quad (24)$$

L'étude asymptotique de la fonction conduit à introduire deux conditions de radiation dans deux domaines différents : le domaine $r \cos \theta > r^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$), et son complémentaire. La valeur de α est choisie en fonction de l'estimation des résidus des asymptotiques de G_1 et G_2 qu'il faut donc estimer dans chacun des deux domaines. Le cas de $G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est assez simple. Pour $G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ nous utilisons une expression explicite de l'intégrale $R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Enfin, nous connaissons explicitement la transformée de Fourier de l'onde de surface $sw(\rho, x_3)$, ce qui conduit à ces estimations.

Les conditions de radiation.

Pour r grand et $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right| < cr^{-(2\alpha+\frac{1}{2})} \quad \text{dans } \mathbf{R}_+^3(\alpha+) := \{x_3 > cr^\alpha\} \\ \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i\sqrt{k^2+z^2}u \right| < cr^{\alpha-\frac{3}{2}} \quad \text{dans } \mathbf{R}_+^3(\alpha-) := \{0 \leq x_3 < cr^\alpha\}. \end{array} \right. \quad (25)$$

4 – Unicité et existence

On introduit les fonctions poids $\varrho = \sqrt{1 + r^2}$ et $\log \varrho = \log(2 + r^2)$. Soit ζ une fonction cutoff de \mathbf{R}_+^3 , nulle pour $R < 1$, et qui vaut 1 pour $R > 2$. Une condition de radiation plus faible que (25) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\nabla (\zeta u e^{-ikr})}{\sqrt{\varrho}} \in L^2(\mathbf{R}_+^3(\alpha+)) \\ \frac{\nabla (\zeta u e^{-i\sqrt{z^2+k^2}\rho})}{\log \varrho} \in L^2(\mathbf{R}_+^3(\alpha-)). \end{array} \right. \quad (26)$$

$$W_\gamma(\mathbf{R}_+^3) := \left\{ u : \begin{array}{l} \frac{u}{\varrho^\gamma} \in L^2(\mathbf{R}_+^3), \quad \frac{\nabla u}{\varrho^\gamma} \in L^2(\mathbf{R}_+^3), \\ \frac{u_{x_3}}{\sqrt{\varrho} \log \varrho} \in L^2(\mathbf{R}^2), \quad \text{pour tout } x_3 \geq 0. \\ u \text{ vérifie (26) et } \gamma > \frac{1}{2} \end{array} \right\}. \quad (27)$$

Le théorème d'unicité

Théorème 1 (*Unicité*) *Le problème (1) admet une unique solution dans l'espace $W_\gamma(\mathbf{R}_+^3)$ qui satisfait la condition radiation (25) ou (26).*

Preuve. Soit $f = 0$. La preuve est divisée en plusieurs étapes.

Nous montrons d'abord que les conditions de radiation entraînent l'orthogonalité de u_0 aux fonctions de Bessel sphériques. Utilisant la transformée de Fourier partielle de u et à nouveau les conditions de radiation, ceci nous permet de montrer que $u_0 = u(x_1, x_2, 0) = 0$.

La condition limite amène alors $\frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} \equiv 0$.

L'expression de la transformée de Fourier montre enfin que $u = 0$ dans \mathbf{R}_+^3 .

Quelques propriétés des polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre \mathbb{P}_l sont les polynômes orthogonaux dans $L^2(]-1, +1[)$ et sont donnés par la formule de Rodrigues :

$$\mathbb{P}_l(x) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (1-x^2)^l. \quad (28)$$

Ils ont la même parité que l et donc

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \mathbb{P}_l(\xi \cos \varphi) e^{im\varphi} d\varphi = 0; & \text{si } (l+m) \text{ impair,} \\ \int_0^{2\pi} \mathbb{P}_l(\xi \cos \varphi) e^{im\varphi} d\varphi = 2 \int_0^\pi \mathbb{P}_l(\xi \cos \varphi) e^{im\varphi} d\varphi; & \text{si } (l+m) \text{ pair.} \end{cases} \quad (29)$$

Le développement polynomial montre que l'intégrale (29) s'écrit aussi

$$\int_0^\pi \mathbb{P}_l(\xi \cos \varphi) e^{im\varphi} d\varphi = \sum_{n=0}^l \beta_n \xi^n \int_0^\pi (\cos \varphi)^n e^{im\varphi} d\varphi, \quad (30)$$

Les coefficients β_n of \mathbb{P}_l sont nuls si $(n + l)$ est impair. Mais les intégrales de gauche dans (30) sont aussi nulles si $(l + m)$ est pair et $|m| > n$ (voir [4]). Si bien que

$$\int_0^{2\pi} \mathbb{P}_l(\xi \cos \varphi) e^{im\varphi} d\varphi = 0, \quad (31)$$

quand $(l + m)$ est pair et $|m| > l$, ou quand $(l + m)$ est impair.

Les fonctions de Bessel sphériques de première espèce $\{j_l\}_{l \geq 0}$, sont reliées aux polynômes de Legendre \mathbb{P}_l par la relation [6] :

$$e^{ikx} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l + 1) j_l(k) \mathbb{P}_l(x) \quad (32)$$

Les fonctions de Legendre associées $\mathbb{P}_l^m(\cos \theta)$ sont définies par :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_l^m(\cos \theta) := (\sin \theta)^m \left(\frac{d}{dx} \right)^m \mathbb{P}_l(\cos \theta) & \text{for } 0 \leq m \leq l \\ \mathbb{P}_l^{-m}(\cos \theta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \mathbb{P}_l^m(\cos \theta) & \text{for } -l \leq m \leq l. \end{cases} \quad (33)$$

Elles ont la parité de $(l+m)$ et donc

$$\mathbb{P}_l^m(0) = 0 \quad \text{si } (l+m) \text{ est impair.} \quad (34)$$

Elles vérifient les relations de récurrence

$$\begin{cases} (l+m)(1-x^2)^{1/2} \mathbb{P}_{l-1}^m(x) = -\mathbb{P}_l^{m+1}(x) + x \mathbb{P}_{l-1}^{m+1}(x), \\ \mathbb{P}_l^{(m+1)}(0) = -(l+m) \mathbb{P}_{(l-1)}^m(0); \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} (l+m) \mathbb{P}_{(l-1)}^m(x) + (l-m+1) \mathbb{P}_{(l+1)}^m(x) = (2l+1)x \mathbb{P}_l^m(x), \\ (l+m) \mathbb{P}_{(l-1)}^m(0) + (l-m+1) \mathbb{P}_{(l+1)}^m(0) = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Relations d'orthogonalité

Soit S_R^+ la surface de la demi-sphère de rayon R dans \mathbf{R}_+^3 . On multiplie l'équation (1) par \bar{u} . On intègre par parties sur le domaine intérieur à S_R^+ et au plan $\{x_3 = 0\}$. La seule partie imaginaire qui vient est sur S_R^+ et c'est

$$\operatorname{Im} \int_{S_R^+} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \bar{u} dS = 0. \quad (37)$$

Soit S_R^1 la partie de S_R^+ contenue dans $\mathbf{R}_+(\alpha+)$ et S_R^2 le complément. On coupe l'intégrale (37) de façon à faire apparaître la condition de radiation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{S_R^+} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \bar{u} dS = \int_{S_R^1} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) \bar{u} dS + ik \int_{S_R^1} |u|^2 dS \\ + \int_{S_R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i\sqrt{z^2 + k^2}u \right) \bar{u} dS + i\sqrt{z^2 + k^2} \int_{S_R^2} |u|^2 dS. \end{array} \right. \quad (38)$$

La condition de radiation (25) ($\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$), montre que (38) induit

$$k \|u\|_{L^2(S_R^+)}^2 \leq c R^{\alpha - \frac{3}{2}} \int_{S_R^+} |u| dS. \quad (39)$$

$$\|u\|_{L^2(S_R^+)} \leq C R^{\alpha - \frac{1}{2}}. \quad (40)$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{L^2(S_R^+)} \leq C R^{\alpha - \frac{1}{2}}. \quad (41)$$

Considérons les fonctions v_l^m ($l \geq 0$ et $|m| \leq l$), solutions de Helmholtz

$$\begin{cases} v_l^m(r, \theta, \varphi) = j_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi) = j_l(kr) \gamma_l^m e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta) \\ \gamma_l^m = (-1)^m \left[\frac{(l + \frac{1}{2}) (l - m)!}{2\pi (l + m)!} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (42)$$

où $P_l^m(\cos \theta)$ sont les fonctions de Legendre associées. La formule de Green avec u et v_l^m ($D_R \subset \mathbf{R}^2$ est le disque de rayon R) donne

$$\int_{D_R} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} v_l^m - \frac{\partial v_l^m}{\partial x_3} u \right) dx_1 dx_2 + \int_{S_R^+} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v_l^m - \frac{\partial v_l^m}{\partial \mathbf{n}} u \right) dS = 0. \quad (43)$$

Les estimations (40) et (41) et l'asymptotique des fonctions de Bessel $j_l(kr)$ montrent que l'intégrale sur S_R^+ a une limite nulle, soit

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} u_0 j_l(k\rho) e^{im\varphi} dx_1 dx_2 = 0, \quad \text{si } (l+m) \text{ est pair.} \quad (44)$$

En coordonnées polaires, ceci est

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \rho j_l(k\rho) c_m(\rho) d\rho = 0, \quad \text{si } (l+m) \text{ est pair.} \quad (45)$$

où c_m est le coefficient de Fourier suivant

$$c_m(\rho) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0 e^{im\varphi} d\varphi. \quad (46)$$

Transformée de Fourier partielle de u

L'espace $W_\gamma(\mathbf{R}_+^3)$ est tel que u_{x_3} définit une distribution tempérée qui se note $u_{x_3} \in S'(\mathbf{R}^2)$. Sa transformée de Fourier est $\widehat{u}_{x_3} \in S'(\mathbf{R}^2)$. Nous cherchons à borner la fonction u_{x_3} indépendamment de x_3 . Le théorème de trace de [2] dans l'espace

$$W_{-\gamma}^1(\mathbf{R}_+^3) = \left\{ u \in D'(\mathbf{R}_+^3) : \frac{u}{\rho^{\gamma+1}} \in L^2(\mathbf{R}_+^3), \frac{\nabla u}{\rho^\gamma} \in L^2(\mathbf{R}_+^3) \right\},$$

qui contient l'espace W_γ défini en (27) suffit (sans être optimal). On obtient

$$\begin{cases} |\langle \widehat{u}_{x_3}, \phi \rangle| = \left| \int_{\mathbf{R}^2} u_{x_3} \widehat{\phi} dx_1 dx_2 \right| \\ \leq \left\| \frac{u_{x_3}}{\rho^{\gamma+\frac{1}{2}}} \right\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \|\phi\|_{H^{\gamma+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^2)} \leq \|u\|_{W_{-\gamma}^1(\mathbf{R}_+^3)} \|\phi\|_{H^{\gamma+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^2)}. \end{cases} \quad (47)$$

On examine d'abord **la distribution \hat{u}_0 dans l'ouvert $\overline{B_k^c} := \mathbf{R}^2 \setminus \overline{B_k}$** . On prolonge $u(\mathbf{x})$ par zéro pour $x_3 < 0$. Comme $\varrho^{-\gamma}u \in L^2(\mathbf{R}_+^3)$, ce prolongement est dans l'espace $S'(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R})$.

\hat{u} satisfait, dans $D'(\overline{B_k^c} \times \mathbf{R}_+)$, l'équation différentielle suivante

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_3^2} + (k^2 - \xi^2)\hat{u} = 0, \quad \xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2. \quad (48)$$

Donc, pour $x_3 > 0$,

$$\hat{u}_{x_3} = T_1 e^{\sqrt{\xi^2 - k^2} x_3} + T_2 e^{-\sqrt{\xi^2 - k^2} x_3} \quad \text{dans } D'(\overline{B_k^c}). \quad (49)$$

où T_1 et T_2 sont des distributions de $D'(\overline{B_k^c})$ indépendantes de x_3 .

$$\frac{\partial \hat{u}_{x_3}}{\partial x_3} = \sqrt{\xi^2 - k^2} T_1 e^{\sqrt{\xi^2 - k^2} x_3} - \sqrt{\xi^2 - k^2} T_2 e^{-\sqrt{\xi^2 - k^2} x_3}. \quad (50)$$

La condition limite conduit à

$$\begin{cases} (z + \sqrt{\xi^2 - k^2}) T_1 + (z - \sqrt{\xi^2 - k^2}) T_2 = 0, & \text{dans } D'(\overline{B_k^c}) \\ \widehat{u}_0 = T_1 + T_2, & \text{dans } D'(\overline{B_k^c}). \end{cases} \quad (51)$$

De (50) et (51) on déduit

$$\widehat{u}_0 = \frac{2\sqrt{\xi^2 - k^2} \widehat{u}_{x_3}}{\left(\sqrt{\xi^2 - k^2} - z\right) e^{\sqrt{\xi^2 - k^2} x_3} + \left(\sqrt{\xi^2 - k^2} + z\right) e^{-\sqrt{\xi^2 - k^2} x_3}}. \quad (52)$$

La distribution tempérée $T := (|\xi| - \sqrt{z^2 + k^2})^3 \widehat{u}_0$ satisfait

$$\begin{cases} T = \mu(\xi) \widehat{u}_{x_3} & \text{dans } D'(\overline{B_k^c}), \text{ où} \\ \mu(\xi) := \frac{2\sqrt{\xi^2 - k^2} (|\xi| - \sqrt{z^2 + k^2})^3}{\left(\sqrt{\xi^2 - k^2} - z\right) e^{\sqrt{\xi^2 - k^2} x_3} + \left(\sqrt{\xi^2 - k^2} + z\right) e^{-\sqrt{\xi^2 - k^2} x_3}} \end{cases} \quad (53)$$

La fonction μ est indéfiniment différentiable dans $\overline{B_k^c}$. Donc, l'inégalité (47) donne

$$|\langle T, \phi \rangle| = |\langle \hat{u}_{x_3}, \mu \phi \rangle| \leq C \|\mu \phi\|_{H^{\gamma+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^2)}, \quad \forall \phi \in D(\overline{B_k^c}), \quad (54)$$

où la constante C est indépendante de x_3 . Comme $\partial^\beta(\mu \phi) \rightarrow 0$ uniformément quand $x_3 \rightarrow +\infty$ pour tout multi-index $|\beta| \leq 2$ (les seuls points critiques sont sur le cercle $\xi^2 = z^2 + k^2$), on obtient $T \equiv 0$, soit

$$\left(|\xi| - \sqrt{z^2 + k^2}\right)^3 \hat{u}_0 \equiv 0. \quad (55)$$

Donc, pour une fonction $\kappa(\psi) \in \mathbb{C}$, la distribution tempérée \hat{u}_0 s'écrit

$$\hat{u}_0 = \kappa(\psi) \delta_{|\xi|=\sqrt{z^2+k^2}} \quad \text{dans } D'(\overline{B_k^c}). \quad (56)$$

On examine ensuite **la distribution \widehat{u}_0 dans l'ouvert $\overline{B_k}$** . C'est une distribution dans $E'(\mathbf{R}^2)$. Sa transformée de Fourier inverse u_0 est dans $C^\infty(\mathbf{R}^2)$. Au sens des distributions et en coordonnées polaires la transformée de Fourier de u_0 s'écrit

$$\widehat{u}_0 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho u_0 e^{i\rho \xi \cos(\varphi-\psi)} d\varphi d\rho \quad (57)$$

qui s'écrit aussi en utilisant la série de Fourier de u_0 dans $L^2(0, 2\pi)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{u}_0 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(\rho) e^{im\varphi} \right) e^{i\rho \xi \cos(\varphi-\psi)} d\varphi d\rho \\ = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \rho \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(\rho) \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} e^{i\rho \xi \cos(\varphi-\psi)} d\varphi d\rho \\ = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \rho \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(\rho) e^{im\psi} \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} e^{i\rho \xi \cos \varphi} d\varphi d\rho. \end{array} \right. \quad (58)$$

Le développement (32) de $e^{i\rho\xi \cos \varphi}$ conduit à

$$\int_0^{2\pi} e^{im\varphi} e^{i\rho\xi \cos \varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sum_{l \geq 0} \Upsilon_l j_l(k\rho) \mathbb{P}_l \left(\frac{\xi}{k} \cos \varphi \right) e^{im\varphi} d\varphi. \quad (59)$$

Nous pouvons intervertir la série et l'intégrale et utiliser (31), ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} e^{im\varphi} e^{i\rho\xi \cos \varphi} d\varphi = \sum_{\substack{l \geq |m| \\ (l+m) \text{ pair}}} \Upsilon_l j_l(k\rho) \int_0^{2\pi} \mathbb{P}_l \left(\frac{\xi}{k} \cos \varphi \right) e^{im\varphi} d\varphi. \quad (60)$$

On obtient

$$\hat{u}_0 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{|m| \leq l \\ (l+m) \text{ pair}}} \Upsilon_l e^{im\psi} \int_0^R \rho j_l(k\rho) c_m(\rho) d\rho \int_0^{2\pi} \mathbb{P}_l \left(\frac{\xi}{k} \cos \varphi \right) e^{im\varphi} d\varphi. \quad (61)$$

Le résultat d'orthogonalité (45) montre que cette expression tend vers zéro quand $R \rightarrow +\infty$, et la transformée de Fourier \hat{u}_0 est nulle sur le disque $\overline{B_k}$.

Conclusion.

Les informations connues de \widehat{u}_0 sur $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{B_k}$ et B_k montrent que

$$\widehat{u}_0 = \kappa(\psi) \delta_{|\xi|=\sqrt{z^2+k^2}} \quad \text{dans } D'(\mathbf{R}^2). \quad (62)$$

La fonction u_0 s'écrit donc

$$\begin{cases} u_0(\rho, \phi) = \int_0^{2\pi} \kappa(\psi) e^{-i\rho\sqrt{z^2+k^2} \sin(\psi-\phi)} d\psi \\ = \int_0^\pi \kappa(\psi) e^{-i\rho\sqrt{z^2+k^2} \sin \psi} d\psi + \int_0^\pi \kappa(\psi) e^{i\rho\sqrt{z^2+k^2} \sin \psi} d\psi. \end{cases} \quad (63)$$

La **phase stationnaire** donne l'asymptotique des intégrales de (63) qui est

$$u_0(\rho, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\kappa\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) e^{i(\rho\sqrt{z^2+k^2} - \frac{\pi}{4})} - \kappa\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-i(\rho\sqrt{z^2+k^2} - \frac{\pi}{4})} \right) + O\left(\rho^{-\frac{3}{2}}\right) \quad (64)$$

qui ne satisfait pas la condition de radiation (26) et donc $\kappa = 0$.

Nous avons montré que $u_0 = 0$ et donc $\widehat{u}_0 = 0$.

Utilisant alors (52) on obtient

$$\widehat{u}_{x_3} = 0 \quad \text{dans} \quad D'(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{B_k}). \quad (65)$$

Utilisant aussi l'équation (48), on obtient

$$\widehat{u}_{x_3} = 0 \quad \text{dans} \quad D'(B_k). \quad (66)$$

Donc pour tout $x_3 > 0$ la distribution \widehat{u}_{x_3} a son support sur le cercle $|\xi| = k$. Elle s'écrit donc ($\kappa(x_3, \psi)$ est une fonction à valeurs complexes),

$$\widehat{u}_{x_3} = \kappa(x_3, \psi) \delta_{|\xi|=k} \quad \text{dans} \quad S'(\mathbf{R}^2). \quad (67)$$

qui ne satisfait pas la condition de radiation (26) et donc $\kappa = 0$.

5 – Théorème d'existence.

Théorème 2 (Existence) Soit $d > 0$ le diamètre du support de f et B_d la boule de rayon d . La fonction u définie par

$$u(\mathbf{x}) = \int_{B_d} G(\mathbf{x}; y_1, y_2, 0) f(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \quad (68)$$

satisfait l'équation (1) et la condition de radiation (25).

Preuve. Comme $G(\mathbf{x}; y_1, y_2, 0)$ satisfait l'équation de Helmholtz dans \mathbf{R}_+^3 , u satisfait aussi l'équation de Helmholtz dans \mathbf{R}_+^3 .

Utilisant (11) il est possible de vérifier que la fonction de Green vérifie

$$\left(zG(\mathbf{x}; y_1, y_2, 0) + \frac{\partial G}{\partial x_3}(\mathbf{x}; y_1, y_2, 0) \right) \Big|_{x_3=0} = \delta_{(x_1, x_2)}(y_1, y_2). \quad (69)$$

Donc u satisfait la condition limite (1) car

$$\left\{ \begin{array}{l} zu - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x_3=0} = \\ \int_{B_d} \left(zG(\mathbf{x}; y_1, y_2, 0) + \frac{\partial G}{\partial x_3}(\mathbf{x}; y_1, y_2, 0) \right) \Big|_{x_3=0} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ = f(x_1, x_2). \end{array} \right. \quad (70)$$

Finalement, u définie par (68) satisfait la condition de radiation (25) car la fonction de Green la satisfait.

Remarque 2 : La preuve de l'unicité dépend du choix de la valeur de α . Mais la solution construite vérifie la condition de radiation pour tous les choix du paramètre α dans la plage choisie.

Cette solution est donc indépendante de α .

6 – Extensions

Une première étape consiste à étendre le résultat d'unicité et d'existence au cas d'un domaine qui est l'extérieur (dans \mathbb{R}_+^3) d'une demi-sphère S^+ de rayon 1, avec une condition limite de Dirichlet sur la demi-sphère et la condition d'impédance sur Γ_∞ , qui est le plan $\{x_3 = 0\}$ moins le disque unité.

On introduit alors l'opérateur Dirichlet-Neuman D_n associé à cette géométrie. Ensuite, nous utilisons un couplage entre une formulation variationnelle (dans la partie perturbée et bornée du domaine) et une condition limite non locale utilisant l'opérateur Dirichlet-Neuman.

7 – L'extérieur d'une demi-sphère.

Soit $\mathbf{R}_{S^+}^3$ la partie de \mathbf{R}_+^3 extérieure à la demi-sphère S^+ .
 Pour $\gamma > \frac{1}{2}$, nous définissons l'espace de Hilbert à poids $W_\gamma(\mathbf{R}_{S^+}^3)$, qui est l'espace des fonctions de $W_\gamma(\mathbf{R}^3)$ restreintes à $\mathbf{R}_{S^+}^3$.

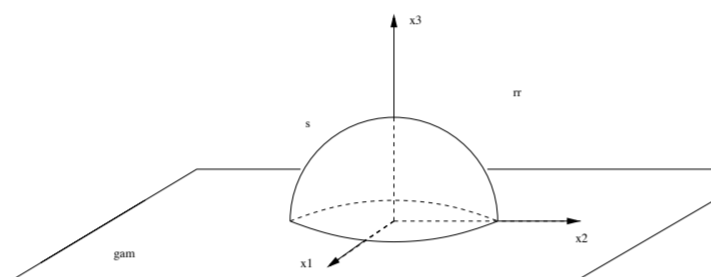


FIG. 4 – *La demi-sphère*

Le problème associé est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0 & \text{dans } \mathbf{R}_{S^+}^3, \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} + zu = 0 & \text{sur } \Gamma_\infty, \\ u = u_d & \text{sur } S^+, \\ u \text{ satisfait la condition de radiation (26).} & \end{array} \right. \quad (71)$$

Nous avons :

Théorème 3 (*Existence et Unicité pour le problème extérieur à la demi-sphère*)

Pour $u_d \in H^{\frac{1}{2}}(S^+)$, le problème (71) a une solution unique dans l'espace $W_\gamma(\mathbf{R}_{S^+}^3)$.

Preuve. On considère le cas où $u_d = 0$. De même que pour le théorème 1, la preuve d'unicité se décompose en plusieurs étapes.

Solutions à variables séparées.

Lemme 4 Soit $l \geq 0$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $(l + m)$ soit impair. Alors les fonctions suivantes satisfont l'équation de Helmholtz et la condition limite $\frac{\partial u}{\partial x_3} + zu = 0$ sur le plan $\{x_3 = 0\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_l^m(r, \theta, \varphi) = (l - m + 1)j_{(l+1)}(kr)e^{im\varphi}\mathbb{P}_{(l+1)}^m(\cos \theta) \\ \quad - (l + m)j_{(l-1)}(kr)e^{im\varphi}\mathbb{P}_{(l-1)}^m(\cos \theta) \\ \quad - \frac{z}{k}(2l + 1)j_l(kr)e^{im\varphi}\mathbb{P}_l^m(\cos \theta) \end{array} \right. \quad (72)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_l^m(r, \theta, \varphi) = (l - m + 1)h_{(l+1)}(kr)e^{im\varphi}\mathbb{P}_{(l+1)}^m(\cos \theta) \\ \quad - (l + m)h_{(l-1)}(kr)e^{im\varphi}\mathbb{P}_{(l-1)}^m(\cos \theta) \\ \quad - \frac{z}{k}(2l + 1)h_l(kr)e^{im\varphi}\mathbb{P}_l^m(\cos \theta) \end{array} \right. \quad (73)$$

Preuve du lemme. Ces fonctions satisfont l'équation de Helmholtz. Pour la condition limite, le résultat pour v_l^m est le même que pour v_l^m . Les relations de récurrence (35) et (36) montrent que

$$\begin{cases} u_l^m \left(r, \frac{\pi}{2}, \varphi \right) = e^{im\varphi} j_{(l+1)}(kr)(l-m+1)\mathbb{P}_{(l+1)}^m(0) \\ \quad - e^{im\varphi} j_{(l-1)}(kr)(l+m)\mathbb{P}_{(l-1)}^m(0) \\ \quad = -(l+m)e^{im\varphi}\mathbb{P}_{(l-1)}^m(0) (j_{(l+1)}(kr)+j_{(l-1)}(kr)). \end{cases} \quad (74)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_l^m}{\partial x_3} \left(r, \frac{\pi}{2}, \varphi \right) = -\frac{z}{kr}(2l+1)j_l(kr)e^{im\varphi}(\mathbb{P}_l^m)'(0) \\ \quad = -\frac{z}{kr}(2l+1)j_l(kr)e^{im\varphi}\mathbb{P}_l^{(m+1)}(0) \\ \quad = \frac{z}{kr}(2l+1)j_l(kr)e^{im\varphi}(l+m)\mathbb{P}_{(l-1)}^m(0). \end{cases} \quad (75)$$

Le résultat découle alors des propriétés des Bessel sphériques [1] :

$$j_{(l+1)}(x) + j_{(l-1)}(x) = \frac{2l+1}{x}j_l(x).$$

Orthogonalité et développement de Fourier de la trace $\frac{\partial u}{\partial r}$

La formule de Green avec u_l^m ou v_l^m et u respectivement donne

$$\begin{cases} \int_{S^+} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} u_l^m dS = \int_{S_R^+} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} u_l^m - \frac{\partial u_l^m}{\partial \mathbf{n}} u \right) dS \\ \int_{S^+} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v_l^m dS = \int_{S_R^+} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v_l^m - \frac{\partial v_l^m}{\partial \mathbf{n}} u \right) dS. \end{cases} \quad (76)$$

La même technique que pour le théorème 1, conduit aux estimations (40) et (41) pour u et $\frac{\partial u}{\partial n}$. Donc l'intégrale sur S_R^+ s'annule quand $R \rightarrow +\infty$ (utilisant l'asymptotique des Bessel sphériques) et on obtient les relations d'orthogonalité suivantes

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial u}{\partial r} u_l^m(1, \theta, \varphi) d\theta d\varphi \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial u}{\partial r} v_l^m(1, \theta, \varphi) d\theta d\varphi = 0. \end{cases} \quad (77)$$

On multiplie (76) par $y_l(k)$ et (77) par $-j_n(k)$. L'addition et la relation du Wronskian [1] ($j_{l+1}(k)y_l(k) - j_l(k)y_{l+1}(k) = \frac{1}{k^2}$), conduisent à

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial u}{\partial r} e^{im\varphi} \left((l-m+1)\mathbb{P}_{(l+1)}^m(\cos\theta) + (l+m)\mathbb{P}_{(l-1)}^m(\cos\theta) \right) = 0. \quad (78)$$

La relation de récurrence (36) donne la propriété d'orthogonalité

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \cos\theta e^{im\varphi} \mathbb{P}_l^m(\cos\theta) d\theta d\varphi = 0, \quad \text{pour } (l+m) \text{ impair.} \quad (79)$$

Les fonctions $\{e^{im\varphi} \mathbb{P}_l^m(\cos\theta)\}$ (pour $(l+m)$ impair) constituent une base de L^2 sur la demi-sphère S^+ (elles sont nulles sur l'équateur), et donc

$$\frac{\partial u}{\partial r} \cos\theta = 0. \quad (80)$$

Donc le support de $\frac{\partial u}{\partial r}$ est contenu dans le cercle

$$C^1 = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}. \quad (81)$$

Extension par zéro et réduction au demi-espace

Soit \tilde{u} l'extension par zéro de u au domaine intérieur à la demi-sphère S^+ et au plan $\{x_3 = 0\}$. Comme u et $\frac{\partial u}{\partial r}$ s'annulent en dehors de tout voisinage du cercle C^1 (quand on est sur S^+), \tilde{u} satisfait dans un sens faible

$$\Delta \tilde{u} + k^2 \tilde{u} = 0 \text{ dans } \mathbf{R}_+^3. \quad (82)$$

De plus,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + z \tilde{u} = 0 \text{ p.p. sur } \mathbf{R}. \quad (83)$$

Comme $\tilde{u} \in W_\gamma(\mathbf{R}_+^3)$, le théorème d'unicité (1) et le théorème d'existence (2) montrent que \tilde{u} est nul presque partout dans \mathbf{R}_+^3 .

Existence

Le résultat d'existence est analogue au cas du demi-espace. On cherche une représentation en potentiel de simple couche sur la demi-sphère :

$$u(x, y) = \int_{S^+} G_{(\cos \theta, \sin \theta)}(x, y) \varphi(\theta) d\theta, \quad (84)$$

Cette expression satisfait l'équation de Helmholtz, la condition limite $\frac{\partial u}{\partial y} + zu = 0$ et la condition de radiation. La partie principale de son noyau est la fonction de Green associée à l'équation de Laplace pour la condition de Neumann (donnée par (11) avec $z = 0$)

$$G_{(x_0, y_0)}^0(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]}} + \frac{1}{\sqrt{[(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2]}} \right) \quad (85)$$

qui est coercive dans l'espace $H^{\frac{1}{2}}(S^+)$.

La différence entre les deux noyaux est un opérateur compact. Donc, l'équation intégrale associée qui est

$$u_d(\eta) = \int_{S^+} G_{(\cos \theta, \sin \theta)}(\cos \eta, \sin \eta) \varphi(\theta) d\theta, \quad 0 < \eta < \pi; \quad (86)$$

est de Fredholm. Le problème extérieur associé a solution unique. Le problème intérieur a un spectre discret et pour une telle valeur propre l'opérateur intégral n'est pas inversible. Ceci prouve le théorème en dehors de cet ensemble discret. L'utilisation d'un potentiel de double couche donne le résultat pour toute valeur de k .

Remarque 3 Pour $l + m$ impair, avec $l \geq 0$ et $|m| < l$, les fonctions suivantes satisfont l'équation de Helmholtz, la condition limite $\frac{\partial u}{\partial y} + zu = 0$ et la condition de radiation :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_l^m(r, \theta, \varphi) = (l - m + 1)h_{(l+1)}(kr)e^{im\varphi}\mathbb{P}_{(l+1)}^m(\cos \theta) \\ \quad \quad \quad \quad \quad - (l + m)h_{(l-1)}(kr)e^{im\varphi}\mathbb{P}_{(l-1)}^m(\cos \theta) \\ \quad \quad \quad \quad \quad - \frac{z}{k}(2l + 1)h_l(kr)e^{im\varphi}\mathbb{P}_l^m(\cos \theta), \end{array} \right. \quad (87)$$

Ici les fonctions h_l^m sont les fonctions de Bessel sphériques du troisième type. L'ensemble w_l^m ne constitue pas une base des solutions du problème extérieur sur la demi-sphère. Il doit être complété par des ondes de surface sortantes associées au cercle C^1 .

L'opérateur de capacité

On introduit l'opérateur D_n Dirichlet to Neumann sur la demi-sphère S^+ associé au problème extérieur (71). La formule de Green's montre que

$$0 < \mathbf{Im} (D_n(u), \bar{u})_{L^2(S^+)} < c \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(S^+)}^2, \quad \forall u \text{ non nul.} \quad (88)$$

La propriété du symbole principal montre que pour un $\alpha > 0$

$$-\mathbf{Re} (D_n(u), \bar{u})_{L^2(S^+)} \geq \alpha \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(S^+)}^2 - c \|u\|_{L^2(S^+)}^2, \quad \forall u. \quad (89)$$

8 – Le domaine perturbé

On considère une frontière qui est une perturbation régulière Γ du plan $\{x_3 = 0\}$ (Fig.5). Soit $\mathbf{R}_{\Gamma+}^3$ la partie de \mathbf{R}_+^3 qui est au dessus de Γ . Soit Γ_{bd} la partie de Γ intérieure à la boule de rayon 1 et soit Γ_{∞} la partie complémentaire.

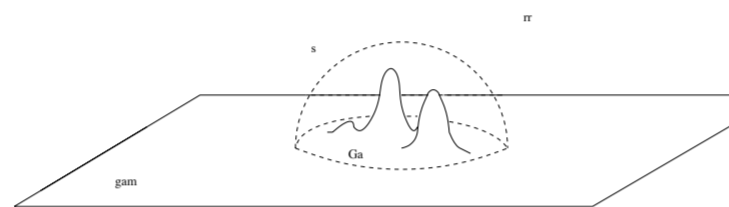


FIG. 5 – $\Gamma = \Gamma_{bd} \cup \Gamma_{\infty}$

Pour $\gamma > \frac{1}{2}$, nous définissons l'espace de Hilbert à poids $W_\gamma(\mathbf{R}_{\Gamma^+}^3)$, qui est l'espace des fonctions de $W_\gamma(\mathbf{R}^3)$ restreintes à $\mathbf{R}_{\Gamma^+}^3$.

Soit un coefficient d'impédance réel $z' > 0$. On cherche une fonction $u \in W_\gamma(\mathbf{R}_{\Gamma^+}^3)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0 & \text{dans } \mathbf{R}_{\Gamma^+}^3, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + zu = 0 & \text{sur } \Gamma_\infty, \\ z'u - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{sur } \Gamma_{bd}, \\ u \text{ satisfait la condition de radiation (25) ou (26).} & \end{array} \right. \quad (90)$$

Théorème 5 *Quand la donnée g est dans l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{bd})$, le problème (90) admet une solution unique dans $W_\gamma(\mathbf{R}_{\Gamma^+}^3)$ qui satisfait la condition de radiation (25) ou (26).*

Preuve Soit B_{Γ^+} la partie de $\mathbf{R}_{\Gamma^+}^3$ contenue dans la boule de rayon 1. Pour $\omega = z' + i\varepsilon$ on introduit le problème couplé

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0 & \text{dans } B_{\Gamma^+}, \\ \omega u - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{sur } \Gamma_{bd}, \\ \frac{\partial u}{\partial r} = D_n u & \text{sur } S^+, \\ u \text{ satisfait la condition de radiation (25) ou (26).} & \end{array} \right. \quad (91)$$

Ce problème est clairement équivalent au problème (90) quand $\varepsilon = 0$.

Pour $\varepsilon > 0$, on considère la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{B_{\Gamma^+}} \nabla u \cdot \nabla v - k^2 \int_{B_{\Gamma^+}} u v - (D_n(u), v)_{L^2(S^+)} - \omega \int_{\Gamma_{bd}} u v. \quad (92)$$

La propriété (89) montre que

$$\mathbf{Re}[i\bar{\omega}a(u, \bar{u})] \geq \|u\|_{H^1(B_{\Gamma^+})}^2 - (k^2 + 1)\|u\|_{L^2(B_{\Gamma^+})}^2. \quad (93)$$

Comme l'injection de $H^1(B_{\Gamma^+})$ dans $L^2(B_{\Gamma^+})$ est compacte, pour tout $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{bd})$, le problème variationnel

$$i\bar{\omega}a(u, v) = -i\bar{\omega} \int_{\Gamma_{bd}} g v, \quad \forall v \in H^1(B_{\Gamma^+}), \quad (94)$$

satisfait l'alternative de Fredholm, et donc l'unicité entraîne l'existence. Mais si u est dans le noyau du problème (94) (ce qui est le cas si $g = 0$), alors

$$0 = \mathbf{Im}[a(u, \bar{u})] = -\mathbf{Im} (D_n(u), u)_{L^2(S^+)} - \varepsilon \|u\|_{L^2(B_{\Gamma^+})}^2. \quad (95)$$

La propriété (88) permet de conclure que $u = 0$ ainsi que $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur Γ_{bd} en utilisant la condition limite (with $g = 0$). Alors l'analyticité montre que $u = 0$ dans le domaine, ce qui montre l'unicité et l'existence quand $\varepsilon > 0$.

Références

- [1] **Abramowitz, M. ; Stegun, I.A.** *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Pubns ; (June 1, 1965).
- [2] **Amrouche, Ch.** *The Neumann problem in the half-space*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.I 335 (2002) 151-156.
- [3] **Chandler-Wilde, S.** *The impedance Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation in a Half-Plane*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol.20, 813-840 (1997).
- [4] **Gradshteyn, I.S. ; Ryzhik, I.M.** *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, Inc.
- [5] **Martinez, A.** *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*. Springer Verlag ; 1st edition (January 2, 2002).
- [6] **Nédélec, J-C.** *Acoustic and Electromagnetic Equations*. Springer Verlag ; 1st edition (March 15, 2001).