Solutions numériques du système d'Euler-Poisson dans le cas d'un flot potentiel

Ingrid Violet

Laboratoire de Mathématiques

Université Blaise Pascal

Clermont-Ferrand, France

Plan

Présentation du système étudié

Euler-Poisson uni-polaire

$$n_t + \text{div}(nu) = 0$$
$$\varepsilon\partial_t(nu) + \varepsilon\text{div}(nu \otimes u) + \nabla p(n) = n\nabla\phi - \frac{\varepsilon nu}{\tau}$$
$$-\lambda^2\Delta\phi = C(x) - n$$

Inconnues

- $n(t,x)$: densité d'électrons
- $u(t,x)$: vitesse des électrons
- $\phi(t,x)$: potentiel électrostatique

Paramètres physiques (positifs)

- ε : masse d'électrons
- τ : temps de relaxation
- λ : longueur de Debye

Données

- p : fonction pression, $p(s) = cs^\gamma$, ($\gamma = 1$ ou $5/3$, $c = 1$)
- $C(x)$: profil de dopage

Euler-Poisson uni-polaire

$$n_t + \mathrm{div}(nu) = 0$$
$$\varepsilon\partial_t(nu) + \varepsilon\mathrm{div}(nu \otimes u) + \nabla p(n) = n\nabla\phi - \frac{\varepsilon nu}{\tau}$$
$$-\lambda^2\Delta\phi = C(x) - n$$

Inconnues

- $n(t,x)$: densité d'électrons
- $u(t,x)$: vitesse des électrons
- $\phi(t,x)$: potentiel électrostatique

Paramètres physiques (positifs)

- ε : masse d'électrons
- τ : temps de relaxation
- λ : longueur de Debye

Données

- p : fonction pression, $p(s) = cs^\gamma$, ($\gamma = 1$ ou $5/3$, $c = 1$)
- $C(x)$: profil de dopage

Ecriture équivalente

$$
\begin{aligned}
n_t + \mathsf{div}(nu) &= 0 \\
\varepsilon\partial_t(nu) + \varepsilon\mathsf{div}(nu \otimes u) + \nabla p(n) &= n\nabla\phi - \frac{\varepsilon nu}{\tau} \\
-\lambda^2\Delta\phi &= C(x) - n
\end{aligned}
$$

Ecriture équivalente

$$
\begin{aligned}
n_t + \mathsf{div}(nu) &= 0 \\
\varepsilon u_t + \varepsilon(u \cdot \nabla)u + \nabla h(n) &= \nabla\phi - \frac{\varepsilon u}{\tau} \\
-\lambda^2\Delta\phi &= C(x) - n
\end{aligned}
$$

avec : h : enthalpie du système, $h'(s) = p'(s)/s$ et $h(1) = 0$.

Problème considéré

Hypothèses :

- problème stationnaire
- flot irrotationnel :
  - rot$u = 0 \Longrightarrow (u \cdot \nabla)u = \frac{1}{2}\nabla(|u|^2)$,
  - il existe un potentiel vitesse ψ tel que : $u = -\nabla\psi$.

$$
\begin{aligned}
-\text{div}(n\nabla\psi) &= 0, \\
\frac{\varepsilon}{2}|\nabla\psi|^2 + h(n) &= \phi + \varepsilon\psi, \\
-\Delta\phi &= C(x) - n, \qquad \text{dans } \Omega
\end{aligned}
$$

$+$ conditions aux bords de type Dirichlet-Neumann

Inconnues

- $n(x)$: densité d'électrons
- $\psi(x)$: potentiel vitesse
- $\phi(x)$: potentiel électrostatique

Paramètres physiques

- $\varepsilon \in (0, 1]$
- $\lambda = \tau = 1$

Problème considéré

Hypothèses :

- problème stationnaire
- flot irrotationnel :
  - rot$u = 0 \Longrightarrow (u \cdot \nabla)u = \frac{1}{2}\nabla(|u|^2)$,
  - il existe un potentiel vitesse ψ tel que : $u = -\nabla\psi$.

$$\begin{aligned} -\text{div}(n\nabla\psi) &= 0, \\ \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\psi|^2 + h(n) &= \phi + \varepsilon\psi, \\ -\Delta\phi &= C(x) - n, \qquad \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

$+$ conditions aux bords de type Dirichlet-Neumann

Inconnues

- $n(x)$: densité d'électrons
- $\psi(x)$: potentiel vitesse
- $\phi(x)$: potentiel électrostatique

Paramètres physiques

- $\varepsilon \in (0, 1]$
- $\lambda = \tau = 1$

Problème considéré

Hypothèses :

- problème stationnaire
- flot irrotationnel :
  - rot$u = 0 \Longrightarrow (u \cdot \nabla)u = \frac{1}{2}\nabla(|u|^2)$,
  - il existe un potentiel vitesse ψ tel que : $u = -\nabla\psi$.

$$\begin{aligned} -\text{div}(n\nabla\psi) &= 0, \\ \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\psi|^2 + h(n) &= \phi + \varepsilon\psi, \\ -\Delta\phi &= C(x) - n, \qquad \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

$+$ conditions aux bords de type Dirichlet-Neumann

Inconnues

- $n(x)$: densité d'électrons
- $\psi(x)$: potentiel vitesse
- $\phi(x)$: potentiel électrostatique

Paramètres physiques

- $\varepsilon \in (0,1]$
- $\lambda = \tau = 1$

Résultats existants

Résultats existants

- **Degond/Markowich (93)** : existence et unicité de solutions sous une condition de petitesse des données ($\varepsilon = 1$ et CL de type Dirichlet).
- **Peng (03)** : existence et unicité de solutions sous une condition de petitesse de ε (CL de type Dirichlet).

Méthode :

- élimination de $\phi \implies$ système elliptique pour ε assez petit,
- utilisation du théorème de point fixe de Schauder.

But :

- retrouver numériquement la condition de petitesse sur ε

Résultats existants

- **Degond/Markowich (93)** : existence et unicité de solutions sous une condition de petitesse des données ($\varepsilon = 1$ et CL de type Dirichlet).
- **Peng (03)** : existence et unicité de solutions sous une condition de petitesse de ε (CL de type Dirichlet).

Méthode :

- élimination de $\phi \Longrightarrow$ système elliptique pour ε assez petit,
- utilisation du théorème de point fixe de Schauder.

But :

- retrouver numériquement la condition de petitesse sur ε

Résultats existants

- **Degond/Markowich (93)** : existence et unicité de solutions sous une condition de petitesse des données ($\varepsilon = 1$ et CL de type Dirichlet).
- **Peng (03)** : existence et unicité de solutions sous une condition de petitesse de ε (CL de type Dirichlet).

Méthode :

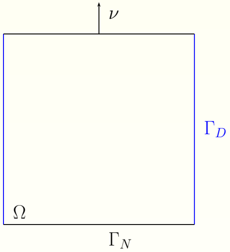
- élimination de $\phi \implies$ système elliptique pour ε assez petit,
- utilisation du théorème de point fixe de Schauder.

But :

- retrouver numériquement la condition de petitesse sur ε

Schémas numériques

Notations et rappel du système



- $\Omega =]0,1[\times]0,1[$,
- $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$,

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{div}(n\nabla\psi) &= 0, \\
\frac{\varepsilon}{2}|\nabla\psi|^2 + h(n) &= \phi + \varepsilon\psi, \\
-\Delta\phi &= C(x) - n, && \text{dans } \Omega \\
\phi = \phi_D, \ \psi &= \psi_D, && \text{sur } \Gamma_D \\
\nabla\phi\cdot\nu = \nabla\psi\cdot\nu &= 0, && \text{sur } \Gamma_N
\end{aligned}
$$

Schéma itératif

- On se donne n^0. Pour $m \geq 0$ on résout :

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(n^m \nabla \psi^m) &= 0, & \\ -\Delta \phi^m &= C - n^m, & \text{dans } \Omega \\ \phi^m = \phi_D,\ \psi^m &= \psi_D = h(n^0) - \phi_D, & \text{sur } \Gamma_D \\ \nabla \phi^m \cdot \nu = \nabla \psi^m \cdot \nu &= 0, & \text{sur } \Gamma_N \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Schéma volumes finis $\Longrightarrow$ solutions constantes par mailles

- Cacul de n^{m+1} par :

$$n^{m+1} = h^{-1}\left(\phi^m - \varepsilon \psi^m + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \psi^m|^2\right)$$

$\Longrightarrow$ Reconstruction du gradient de ψ^m ?

Schéma itératif

- On se donne n^0. Pour $m \geq 0$ on résout :

$$\begin{aligned} -\text{div}(n^m \nabla \psi^m) = 0, & \\ -\Delta \phi^m = C - n^m, & \qquad \text{dans } \Omega \\ \phi^m = \phi_D,\ \psi^m = \psi_D = h(n^0) - \phi_D, & \qquad \text{sur } \Gamma_D \\ \nabla \phi^m \cdot \nu = \nabla \psi^m \cdot \nu = 0, & \qquad \text{sur } \Gamma_N \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Schéma volumes finis $\Longrightarrow$ solutions constantes par mailles

- Cacul de n^{m+1} par :

$$n^{m+1} = h^{-1}\left(\phi^m - \varepsilon \psi^m + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \psi^m|^2\right)$$

$\Longrightarrow$ Reconstruction du gradient de ψ^m ?

Schéma itératif

- On se donne n^0. Pour $m \geq 0$ on résout :

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(n^m \nabla \psi^m) &= 0, & \\ -\Delta \phi^m &= C - n^m, & \text{dans } \Omega \\ \phi^m = \phi_D,\ \psi^m &= \psi_D = h(n^0) - \phi_D, & \text{sur } \Gamma_D \\ \nabla \phi^m \cdot \nu = \nabla \psi^m \cdot \nu &= 0, & \text{sur } \Gamma_N \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Schéma volumes finis $\Longrightarrow$ solutions constantes par mailles

- Cacul de n^{m+1} par :

$$n^{m+1} = h^{-1}\left(\phi^m - \varepsilon\psi^m + \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\psi^m|^2\right)$$

$\Longrightarrow$ Reconstruction du gradient de ψ^m ?

Schéma itératif

- On se donne n^0. Pour $m \geq 0$ on résout :

$$\begin{aligned} -\text{div}(n^m \nabla \psi^m) &= 0, & \\ -\Delta \phi^m &= C - n^m, & \text{dans } \Omega \\ \phi^m = \phi_D,\ \psi^m &= \psi_D = h(n^0) - \phi_D, & \text{sur } \Gamma_D \\ \nabla \phi^m \cdot \nu = \nabla \psi^m \cdot \nu &= 0, & \text{sur } \Gamma_N \end{aligned}$$

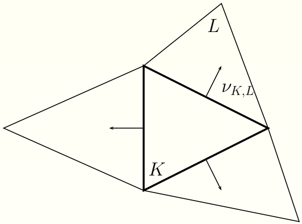
$\Longrightarrow$ Schéma volumes finis $\Longrightarrow$ solutions constantes par mailles

- Cacul de n^{m+1} par :

$$n^{m+1} = h^{-1}\left(\phi^m - \varepsilon \psi^m + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \psi^m|^2\right)$$

$\Longrightarrow$ Reconstruction du gradient de ψ^m ?

Integration sur les volumes de contrôle



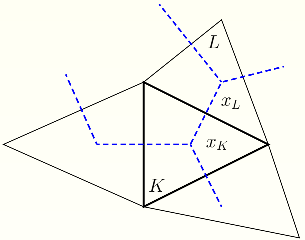
Equations intégrées sur K

$$-\mathrm{div}(n^m \nabla \psi^m) = 0$$
$$-\Delta \phi^m = C - n^m$$

$$\int_K \Delta \phi^m = \int_K n^m - C \Rightarrow \sum_{\sigma = K|L \,\in\, \mathcal{E}(K)} \int_\sigma \nabla \phi^m \cdot \nu_{K,L} = \int_K n^m - C$$

$$\int_K \mathrm{div}(n^m \nabla \psi^m) = 0 \Rightarrow \sum_{\sigma = K|L \,\in\, \mathcal{E}(K)} \int_\sigma n^m \nabla \psi^m \cdot \nu_{K,L} = 0$$

Integration sur les volumes de contrôle



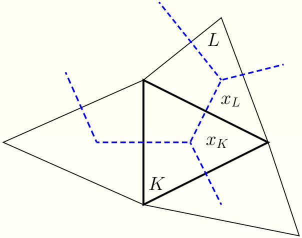
maillage admissible

Equations intégrées sur K

$$-\mathrm{div}(n^m \nabla \psi^m) = 0,$$
$$-\Delta \phi^m = C - n^m,$$

$$\int_K \Delta \phi^m = \int_K n^m - C \Rightarrow \sum_{\sigma = K|L \,\in\, \mathcal{E}(K)} \int_\sigma \nabla \phi^m \cdot \nu_{K,L} = \int_K n^m - C$$

$$\int_K \mathrm{div}(n^m \nabla \psi^m) = 0 \Rightarrow \sum_{\sigma = K|L \,\in\, \mathcal{E}(K)} \int_\sigma n^m \nabla \psi^m \cdot \nu_{K,L} = 0$$



Approximation des flux

$$\int_\sigma \nabla\phi^m \cdot \nu_{K,L} \approx m(\sigma)\frac{\phi_L^m - \phi_K^m}{d(x_K, x_L)}$$

$$\int_\sigma n^m \nabla\psi^m \cdot \nu_{K,L} \approx m(\sigma)\frac{n_K^m + n_L^m}{2}\frac{\psi_L^m - \psi_K^m}{d(x_K, x_L)}$$

Schéma numérique

$$\sum_{\sigma\, \in\, \mathcal{E}(K)} m(\sigma)\frac{\phi_L^m - \phi_K^m}{d(x_K, x_L)} = m(K)(n_K^m - C_K)$$

$$\sum_{\sigma\, \in\, \mathcal{E}(K)} m(\sigma)\frac{n_K^m + n_L^m}{2}\frac{\psi_L^m - \psi_K^m}{d(x_K, x_L)} = 0$$

- **Reconstruction d'un vecteur à partir de ses flux** : [Droniou/Eymard (05)]

$$m(K)e = \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}(K)} m(\sigma)e \cdot \nu_{K,L}(x_\sigma - x_K)$$

$$\Rightarrow \nabla\psi_K^m = \frac{1}{m(K)} \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}(K)} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, x_L)}(\psi_L^m - \psi_K^m)(x_\sigma - x_K)$$

- calcul de n^{m+1} :

$$n_K^{m+1} = h^{-1}(\phi_K^m + \varepsilon\psi_K^m - \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\psi_K^m|^2)$$

Autre méthode : volumes finis mixtes, Droniou/Eymard (05)

- pas de condition d'admissibilité du maillage
- reconstruction du gradient intrinsèque au schéma

- **Reconstruction d'un vecteur à partir de ses flux** : [Droniou/Eymard (05)]

$$m(K)e = \sum_{\sigma=K|L\ \in\ \mathcal{E}(K)} m(\sigma)e\cdot\nu_{K,L}(x_\sigma - x_K)$$

$$\Rightarrow\ \nabla\psi_K^m = \frac{1}{m(K)}\sum_{\sigma=K|L\ \in\ \mathcal{E}(K)} \frac{m(\sigma)}{d(x_K,x_L)}(\psi_L^m - \psi_K^m)(x_\sigma - x_K)$$

- calcul de n^{m+1} :

$$n_K^{m+1} = h^{-1}\big(\phi_K^m + \varepsilon\psi_K^m - \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\psi_K^m|^2\big)$$

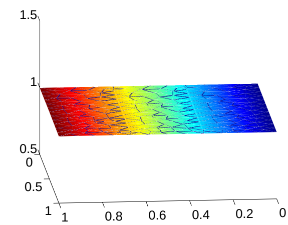
Autre méthode : volumes finis mixtes, Droniou/Eymard (05)

- pas de condition d'admissibilité du maillage
- reconstruction du gradient intrinsèque au schéma

Résultats numériques

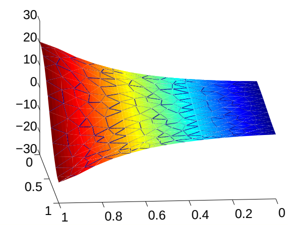
Cas test

Denité d'électron

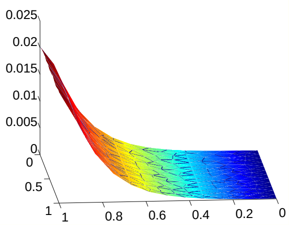


$n \equiv 1$

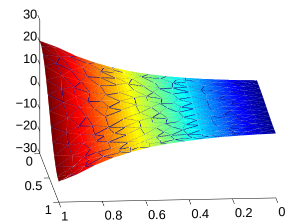
Potentiel vitesse

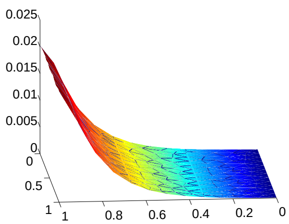


Potentiel électrostatique



Solution approchée

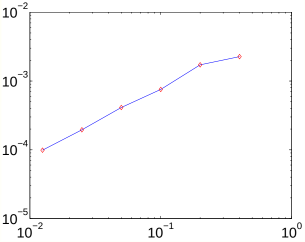




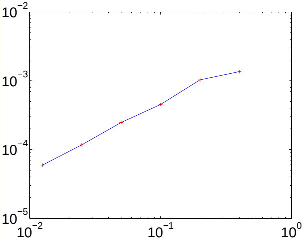
Solution exacte

Cas test (suite)

Erreur sur la densité d'électron en fonction du pas du maillage



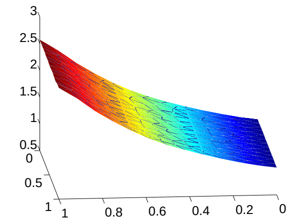
Cas $\gamma = 1$

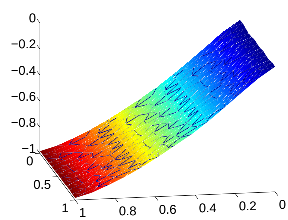


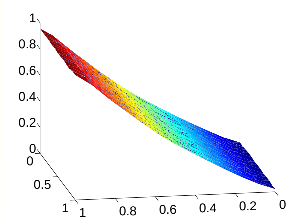
Cas $\gamma = 5/3$

Condition de petitesse sur ε pour le schéma VF4

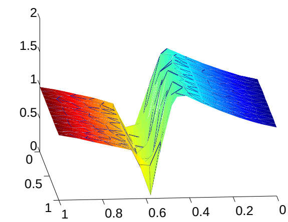
Denité d'électron | Potentiel vitesse | Potentiel électrostatique

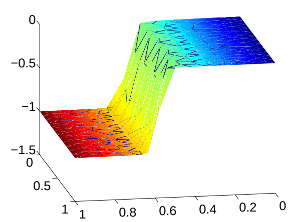


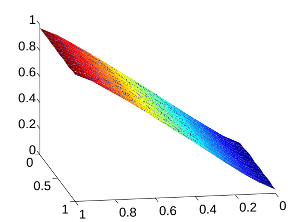




Cas $\gamma = 1, \ \varepsilon = 10^{-2}$



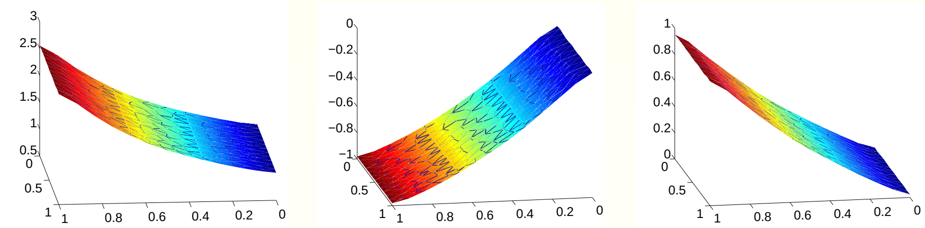




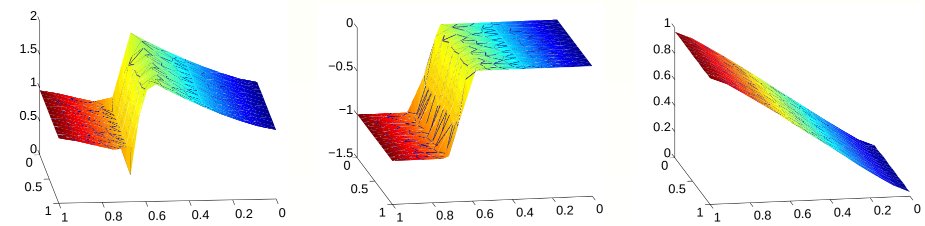
Cas $\gamma = \varepsilon = 1$

Condition de petitesse sur ε pour le schéma Droniou/Eymard

Denité d'électron | Potentiel vitesse | Potentiel électrostatique



Cas $\gamma = 1,\ \varepsilon = 10^{-2}$



Cas $\gamma = \varepsilon = 1$