

Raffinement local espace-temps et algorithmes de Schwarz (optimisés)

Laurence HALPERN

LAGA - Université Paris 13

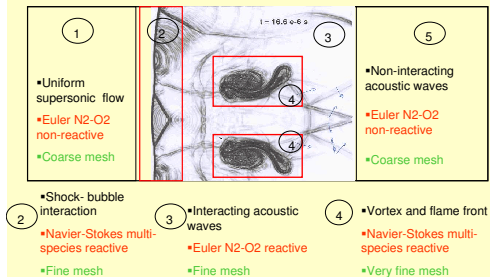
CANUM. Juin 2006

Résumé

- 1 Motivations
- 2 L'équation des ondes 1-D
 - Problème de transmission et algorithme de Schwarz
 - Le problème couplé : stabilité
 - L'algorithme discret : volumes finis
 - Performances numériques
- 3 L'équation d'advection-diffusion
 - L'algorithme de Schwarz
 - La méthode de Galerkin discontinu
 - Performances numériques
- 4 Conclusion et perspectives

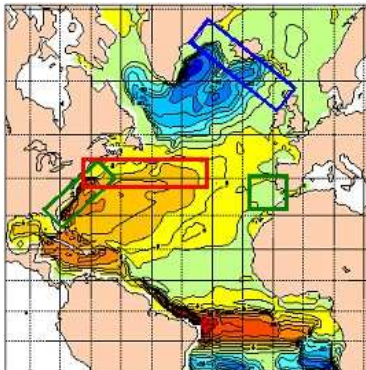
Raffinement de maillage

H2 Bubble – Shock Interaction



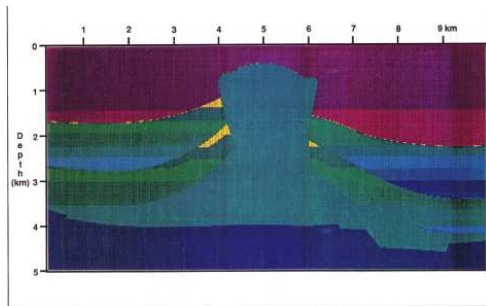
Application en combustion

Raffinement de maillage



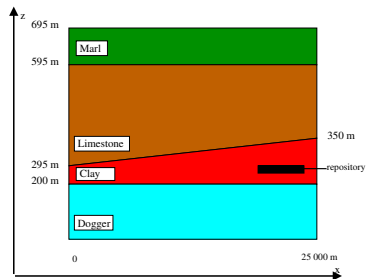
Application au couplage océan-atmosphère

Raffinement de maillage



Application en géophysique

Raffinement de maillage



Application au stockage souterrain des déchets

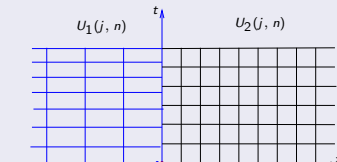
Les problèmes

- 1 Raffinement en espace : méthodes mixtes, mortar, Galerkin discontinu..
- 2 Raffinement en temps ?

Les problèmes

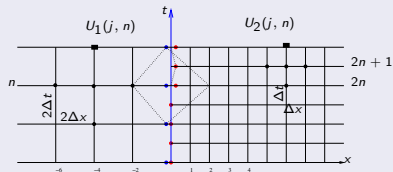
- 1 Raffinement en espace : méthodes mixtes, mortar, Galerkin discontinu..
- 2 Raffinement en temps ?

Raffinement/jonction



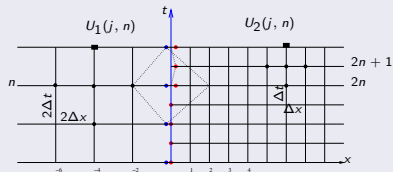
Les solutions

Interpolation



$$U_2(0, 2n) = U_1(0, n), \quad U_2(0, 2n + 1) = \frac{1}{2}(U_1(0, n) + U_1(0, n + 1))$$

Interpolation



$$U_2(0, 2n) = U_1(0, n), \quad U_2(0, 2n + 1) = \frac{1}{2}(U_1(0, n) + U_1(0, n + 1))$$

Avantages : Simple, explicite

Inconvénients : non toujours stable, peu flexible, précision ?

Les solutions

Autre approche : décomposition de domaines

- ♣ Approche continue.
- ♣ Puis discrétisations indépendantes.

Les solutions

Autre approche : décomposition de domaines

- ♣ Approche continue.
- ♣ Puis discrétisations indépendantes.

Avantages : simple, stable, flexible, précise.

inconvénients : a priori : pas explicite.

Les solutions

Programme

- Ecrire un problème couplé
- Discrétiser dans chaque sous-domaine
- Projeter une grille sur une autre

Résumé

- 1 Motivations
- 2 L'équation des ondes 1-D
 - Problème de transmission et algorithme de Schwarz
 - Le problème couplé : stabilité
 - L'algorithme discret : volumes finis
 - Performances numériques
- 3 L'équation d'advection-diffusion
 - L'algorithme de Schwarz
 - La méthode de Galerkin discontinu
 - Performances numériques
- 4 Conclusion et perspectives

Résumé

- 1 Motivations
- 2 L'équation des ondes 1-D
 - Problème de transmission et algorithme de Schwarz
 - Le problème couplé : stabilité
 - L'algorithme discret : volumes finis
 - Performances numériques
- 3 L'équation d'advection-diffusion
 - L'algorithme de Schwarz
 - La méthode de Galerkin discontinu
 - Performances numériques
- 4 Conclusion et perspectives

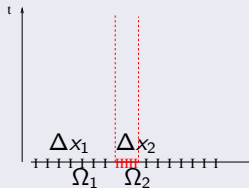
Les problèmes

L'équation

$$\mathcal{L}u := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

Les problèmes

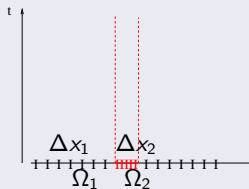
Raffinement



$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \lesssim \gamma \Rightarrow \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \approx \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

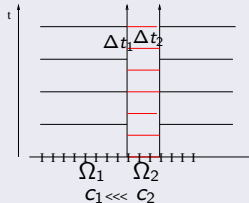
Les problèmes

Raffinement



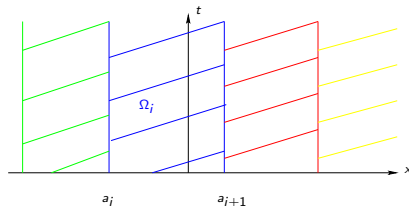
$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \lesssim \gamma \Rightarrow \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \approx \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

Discontinuités



$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \lesssim \gamma \Rightarrow \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \approx \frac{c_1}{c_2}$$

Le problème de transmission



définition

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(u_i) &= 0 & x \in \Omega_i, \quad t \in (0, T) \\
 \mathcal{B}_i^-(u_i) &= \mathcal{B}_i^-(u_{i-1}) & x = a_i, \quad t \in (0, T) \\
 \mathcal{B}_i^+(u_i) &= \mathcal{B}_i^+(u_{i+1}) & x = a_{i+1}, \quad t \in (0, T),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u_i^k) &= 0 & x \in \Omega_i, \quad t \in (0, T) \\ \mathcal{B}_i^-(u_i^k) &= \mathcal{B}_i^-(u_{i-1}^{k-1}) & x = a_i, \quad t \in (0, T) \\ \mathcal{B}_i^+(u_i^k) &= \mathcal{B}_i^+(u_{i+1}^{k-1}) & x = a_{i+1}, \quad t \in (0, T).\end{aligned}$$

L'algorithme de Schwarz

Choix optimal

$$\mathcal{B}_i^- := \partial_x - \frac{1}{c} \partial_t, \mathcal{B}_i^+ := \partial_x + \frac{1}{c} \partial_t$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_i^k) &= f & x \in \Omega_i, \quad t \in (0, T) \\ \mathcal{B}^-(u_i^k) &= \mathcal{B}^-(u_{i-1}^{k-1}) & x = a_i, \quad t \in (0, T) \\ \mathcal{B}^+(u_i^k) &= \mathcal{B}^+(u_{i+1}^{k-1}) & x = a_{i+1}, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

L'algorithme de Schwarz

Choix optimal

$$\mathcal{B}_i^- := \partial_x - \frac{1}{c} \partial_t, \mathcal{B}_i^+ := \partial_x + \frac{1}{c} \partial_t$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_i^k) &= f & x \in \Omega_i, \quad t \in (0, T) \\ \mathcal{B}^-(u_i^k) &= \mathcal{B}^-(u_{i-1}^{k-1}) & x = a_i, \quad t \in (0, T) \\ \mathcal{B}^+(u_i^k) &= \mathcal{B}^+(u_{i+1}^{k-1}) & x = a_{i+1}, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

convergence

Convergence en 2 itérations pour $T < T_0 = \min_{1 \leq i \leq I} |a_{i+1} - a_i|/c$



Fenêtres en temps de taille T_0

Estimations d'énergie, stabilité

première estimation

$$\begin{aligned}
 E_{\Omega_i}(u_i)(t) &+ \frac{c}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^+ u_i(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^- u_i(a_{i+1}, s))^2] ds \\
 &= \frac{c}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^- u_i(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^+ u_i(a_{i+1}, s))^2] ds + E_{\Omega_i}(u_i)(0).
 \end{aligned}$$

Estimations d'énergie, stabilité

première estimation

$$\begin{aligned}
 E_{\Omega_i}(u_i)(t) &+ \frac{c}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^+ u_i(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^- u_i(a_{i+1}, s))^2] ds \\
 &= \frac{c}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^- u_i(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^+ u_i(a_{i+1}, s))^2] ds + E_{\Omega_i}(u_i)(0).
 \end{aligned}$$

Conditions de transmission :

$$\mathcal{B}^- u_i(a_i, \cdot) = \mathcal{B}^- u_{i-1}(a_i, \cdot), \quad \mathcal{B}^+ u_i(a_{i+1}, \cdot) = \mathcal{B}^+ u_{i+1}(a_{i+1}, \cdot)$$

Estimations d'énergie, stabilité

première estimation

$$\begin{aligned}
 E_{\Omega_i}(u_i)(t) &+ \frac{c}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^+ u_i(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^- u_i(a_{i+1}, s))^2] ds \\
 &= \frac{c}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^- u_i(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^+ u_i(a_{i+1}, s))^2] ds + E_{\Omega_i}(u_i)(0).
 \end{aligned}$$

Conditions de transmission :

$$\mathcal{B}^- u_i(a_i, \cdot) = \mathcal{B}^- u_{i-1}(a_i, \cdot), \quad \mathcal{B}^+ u_i(a_{i+1}, \cdot) = \mathcal{B}^+ u_{i+1}(a_{i+1}, \cdot)$$

substitution et sommation

$$\begin{aligned}
 E_{\Omega_i}(u_i)(t) &+ \frac{c}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^+ u_i(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^- u_i(a_{i+1}, s))^2] ds \\
 &= \frac{c}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^- u_{i-1}(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^+ u_{i+1}(a_{i+1}, s))^2] ds + E_{\Omega_i}(u_i)(0).
 \end{aligned}$$

Estimations d'énergie, stabilité

substitution et sommation

$$\begin{aligned}
 \sum_i E_{\Omega_i}(u_i)(t) &+ \frac{c}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^+ u_i(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^- u_i(a_{i+1}, s))^2] ds \\
 &= \frac{c}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^- u_{i-1}(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^+ u_{i+1}(a_{i+1}, s))^2] ds + E_{\Omega_i}(u_i)(0).
 \end{aligned}$$

Estimations d'énergie, stabilité

convergence de l'algorithme de Schwarz

$$\begin{aligned}
 \sum_k \sum_i E_{\Omega_i}(u_i^k)(t) &+ \frac{c}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^+ u_i^k(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^- u_i^k(a_{i+1}, s))^2] ds \\
 &= \frac{c}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^- u_{i-1}^{k-1}(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^+ u_{i+1}^{k-1}(a_{i+1}, s))^2] ds
 \end{aligned}$$

Stabilité sur l'interface

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^- u_i(a_i, \cdot) &= \mathcal{B}^- u_{i-1}(a_i, \cdot) + g_i^- \\ \mathcal{B}^+ u_i(a_{i+1}, \cdot) &= \mathcal{B}^+ u_{i+1}(a_{i+1}, \cdot) + g_i^+\end{aligned}$$

Stabilité sur l'interface

$$\mathcal{B}^- u_i(a_i, \cdot) = \mathcal{B}^- u_{i-1}(a_i, \cdot) + g_i^-$$

$$\mathcal{B}^+ u_i(a_{i+1}, \cdot) = \mathcal{B}^+ u_{i+1}(a_{i+1}, \cdot) + g_i^+$$

$$\begin{aligned} E_{\Omega_i}(u_i)(t) &+ \frac{c}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^+ u_i(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^- u_i(a_{i+1}, s))^2] ds \\ &= \frac{c}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^- u_i(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^+ u_i(a_{i+1}, s))^2] ds + E_{\Omega_i}(u_i)(0). \end{aligned}$$

Stabilité sur l'interface

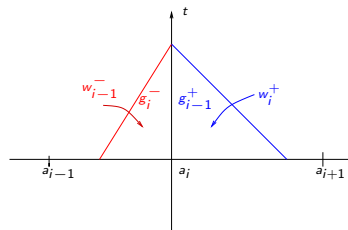
$$\mathcal{B}^- u_i(a_i, \cdot) = \mathcal{B}^- u_{i-1}(a_i, \cdot) + g_i^-$$

$$\mathcal{B}^+ u_i(a_{i+1}, \cdot) = \mathcal{B}^+ u_{i+1}(a_{i+1}, \cdot) + g_i^+$$

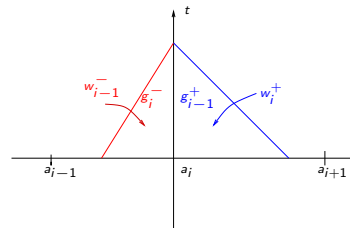
$$\begin{aligned} E_{\Omega_i}(u_i)(t) &+ \frac{c}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^+ u_i(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^- u_i(a_{i+1}, s))^2] ds \\ &= \frac{c}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^- u_i(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^+ u_i(a_{i+1}, s))^2] ds + E_{\Omega_i}(u_i)(0). \end{aligned}$$

QUE FAIRE ? Ecrire des conditions de transmission **homogènes**.

Un relèvement rétrograde



Un relèvement rétrograde



Propriétés

$$\mathcal{B}^- w_{i-1}^-(a_i, \cdot) = g_i^-,$$

$$\mathcal{B}^+ w_{i-1}^-(a_i, \cdot) = 0,$$

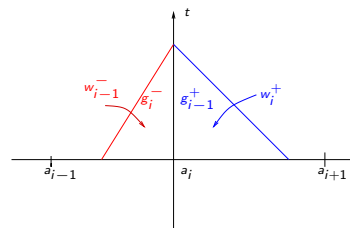
$$E_{\Omega_{i-1}}(w_{i-1}^-)(t) \leq \frac{c}{4} \|g_i^-\|_{L^2(0,T)}^2,$$

$$\mathcal{B}^+ w_i^+(a_i, \cdot) = g_{i-1}^+,$$

$$\mathcal{B}^- w_i^+(a_i, \cdot) = 0,$$

$$E_{\Omega_i}(w_i^+)(t) \leq \frac{c}{4} \|g_{i-1}^+\|_{L^2(0,T)}^2$$

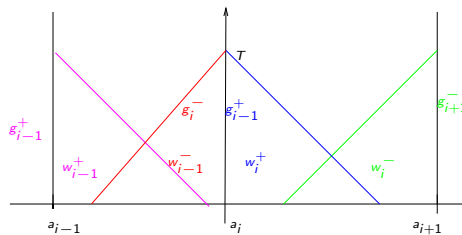
Un relèvement rétrograde



Réécriture des conditions de transmission

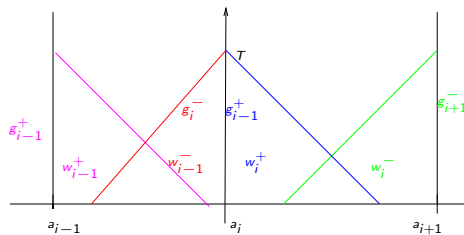
$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i^- u_i(a_i, \cdot) &= \mathcal{B}_i^- (u_{i-1} + w_{i-1}^-)(a_i, \cdot) && \text{in } (0, T), \\ \mathcal{B}_i^+ u_i(a_{i+1}, \cdot) &= \mathcal{B}_i^+ (u_{i+1} + w_{i+1}^+)(a_{i+1}, \cdot) && \text{in } (0, T). \end{aligned}$$

Un relèvement rétrograde, suite



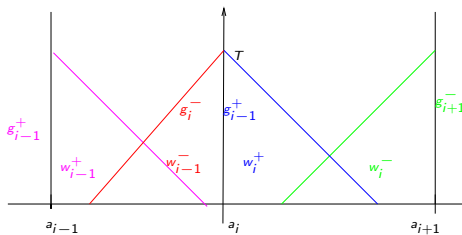
$$\mathcal{B}^-(u_i)(a_i, \cdot) = \mathcal{B}^-(u_{i-1} + w_{i-1}^-)(a_i, \cdot)$$

Un relèvement rétrograde, suite



$$\mathcal{B}^-(u_i + w_i^-, a_i, \cdot) = \mathcal{B}^-(u_{i-1} + w_{i-1}^-, a_i, \cdot)$$

Un relèvement rétrograde, suite



$$\mathcal{B}^-(u_i + w_i^- + w_i^+)(a_i, \cdot) = \mathcal{B}^-(u_{i-1} + w_{i-1}^- + w_{i-1}^+)(a_i, \cdot)$$

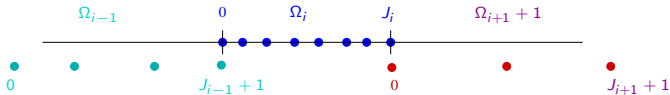
Stabilité, fin

collecte

$$\sum_i E_{\Omega_i}(u_i + w_i^+ + w_i^-)(t) \leq \sum_i E_{\Omega_i}(u_i + w_i^+ + w_i^-)(0)$$

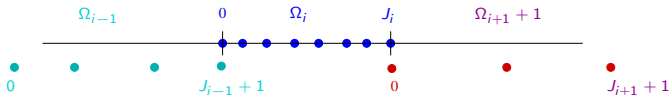
$$\sum_i E_{\Omega_i}(u_i)(t) \leq \alpha [\|\partial_x p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{\pm} \sum_{i=1}^I \|g_i^{\pm}\|_{L^2(0,T)}^2].$$

Discrétisation



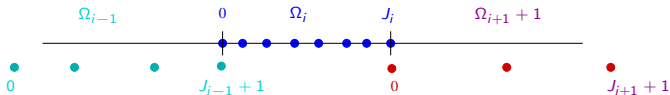
- Facile à mettre en oeuvre avec des conditions aux limites,

Discrétisation



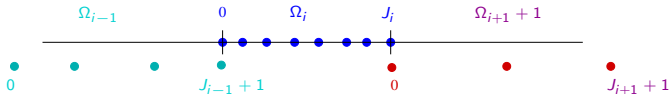
- Facile à mettre en oeuvre avec des conditions aux limites,
- schéma stable,

Discrétisation



- Facile à mettre en oeuvre avec des conditions aux limites,
- schéma stable,
- la précision globale est conservée.

Discrétisation



- Facile à mettre en oeuvre avec des conditions aux limites,
- schéma stable,
- la précision globale est conservée.

volumes finis "vertex centered"

Le problème discret

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{c^2} D_t^+ D_t^- - D_x^+ D_x^- \right) U_i(j, n) &= 0 \quad 1 \leq j \leq J_i, 1 \leq n \leq N_i, \\
 B_i^- U_i(0, \cdot) &= \mathbb{P}_{i-1,i} \tilde{B}_i^- U_{i-1}(J_{i-1} + 1, \cdot) \\
 B_i^+ U_i(J_i + 1, \cdot) &= \mathbb{P}_{i+1,i} \tilde{B}_i^+ U_{i+1}(0, \cdot)
 \end{aligned}$$

Le problème discret

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c^2} D_t^+ D_t^- - D_x^+ D_x^- \right) U_i(j, n) &= 0 \quad 1 \leq j \leq J_i, 1 \leq n \leq N_i, \\ B_i^- U_i(0, \cdot) &= \mathbb{P}_{i-1,i} \tilde{B}_i^- U_{i-1}(J_{i-1} + 1, \cdot) \\ B_i^+ U_i(J_i + 1, \cdot) &= \mathbb{P}_{i+1,i} \tilde{B}_i^+ U_{i+1}(0, \cdot) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_i^+ U_i &= \left(\frac{\Delta x_i}{2c^2} D_t^+ D_t^- + D_x^- + \frac{1}{c} D_t^0 \right) U_i \text{ en } (J_i + 1, n), \\ \tilde{B}_i^+ U_{i+1} &= \left(-\frac{\Delta x_{i+1}}{2c^2} D_t^+ D_t^- + D_x^+ + \frac{1}{c} D_t^0 \right) U_{i+1} \text{ en } (0, n) \end{aligned}$$

Le problème discret

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c^2} D_t^+ D_t^- - D_x^+ D_x^- \right) U_i(j, n) &= 0 \quad 1 \leq j \leq J_i, 1 \leq n \leq N_i, \\ B_i^- U_i(0, \cdot) &= \mathbb{P}_{i-1,i} \tilde{B}_i^- U_{i-1}(J_{i-1} + 1, \cdot) \\ B_i^+ U_i(J_i + 1, \cdot) &= \mathbb{P}_{i+1,i} \tilde{B}_i^+ U_{i+1}(0, \cdot) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_i^+ U_i &= \left(\frac{\Delta x_i}{2c^2} D_t^+ D_t^- + D_x^- + \frac{1}{c} D_t^0 \right) U_i \text{ en } (J_i + 1, n), \\ \tilde{B}_i^+ U_{i+1} &= \left(-\frac{\Delta x_{i+1}}{2c^2} D_t^+ D_t^- + D_x^+ + \frac{1}{c} D_t^0 \right) U_{i+1} \text{ en } (0, n) \end{aligned}$$

$\mathbb{P}_{i,j}$ Projection L^2 de V_i sur V_j ,
 V_i fonctions affines par morceaux sur la grille de pas Δt_i .

estimation d'énergie discrète

$$\begin{aligned}
 E(U_i)(n) - E(U_i)(n-1) &+ \frac{c\Delta t_i}{2} [(\tilde{B}_{i-1}^+ U_i(0, n))^2 + (\tilde{B}_{i+1}^- U_i(J+1, n))^2] \\
 &= \frac{c\Delta t_i}{2} [(B_i^- U_i(0, n))^2 + (B_i^+ U_i(J+1, n))^2]
 \end{aligned}$$

estimation d'énergie discrète

$$\begin{aligned}
 E(U_i)(n) - E(U_i)(n-1) &+ \frac{c\Delta t_i}{2} [(\tilde{B}_{i-1}^+ U_i(0, n))^2 + (\tilde{B}_{i+1}^- U_i(J+1, n))^2] \\
 &= \frac{c\Delta t_i}{2} [(B_i^- U_i(0, n))^2 + (B_i^+ U_i(J+1, n))^2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_i^- U_i(0, \cdot) &= \mathbb{P}_{i-1, i} \tilde{B}_i^- U_{i-1}(J_{i-1} + 1, \cdot) \\
 B_i^+ U_i(J+1, \cdot) &= \mathbb{P}_{i+1, i} \tilde{B}_i^+ U_{i+1}(0, \cdot)
 \end{aligned}$$

estimation d'énergie discrète

$$\begin{aligned} E(U_i)(n) - E(U_i)(n-1) &+ \frac{c\Delta t_i}{2} [(\tilde{B}_{i-1}^+ U_i(0, n))^2 + (\tilde{B}_{i+1}^- U_i(J+1, n))^2] \\ &= \frac{c\Delta t_i}{2} [(B_i^- U_i(0, n))^2 + (B_i^+ U_i(J+1, n))^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_i^- U_i(0, \cdot) &= \mathbb{P}_{i-1, i} \tilde{B}_i^- U_{i-1}(J_{i-1} + 1, \cdot) \\ B_i^+ U_i(J+1, \cdot) &= \mathbb{P}_{i+1, i} \tilde{B}_i^+ U_{i+1}(0, \cdot) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(U_i)(n) - E(U_i)(n-1) &+ \frac{c\Delta t_i}{2} [(\tilde{B}_{i-1}^+ U_i(0, n))^2 + (\tilde{B}_{i+1}^- U_i(J+1, n))^2] \\ &\leq \frac{c\Delta t_{i-1}}{2} (\tilde{B}_i^- U_{i-1}(J_{i-1} + 1, \cdot))^2 + \frac{c\Delta t_{i+1}}{2} (\tilde{B}_i^+ U_{i+1}(0, \cdot))^2 \end{aligned}$$

Conséquences

- Existence et unicité, stabilité/conditions initiales et second membre.

Conséquences

- Existence et unicité, stabilité/conditions initiales et second membre.
- convergence du Schwarz Waveform relaxation algorithm discret.

Schwarz Waveform relaxation algorithm discret

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c^2} D_t^+ D_t^- - D_x^+ D_x^- \right) U_i^k(j, n) &= 0 \quad 1 \leq j \leq J_i, 1 \leq n \leq N_i, \\ B_i^- U_i^k(0, \cdot) &= \mathbb{P}_{i-1,i} \tilde{B}_i^- U_{i-1}^{k-1}(J_{i-1} + 1, \cdot) \\ B_i^+ U_i^k(J_i + 1, \cdot) &= \mathbb{P}_{i+1,i} \tilde{B}_i^+ U_{i+1}^{k-1}(0, \cdot) \end{aligned}$$

Stabilité du problème couplé

$$B_i^- U_i(0, \cdot) = \mathbb{P}_{i-1,i} \tilde{B}_i^- U_{i-1}(J_{i-1} + 1, \cdot) + G_i^-$$

$$B_i^+ U_i(J_i + 1, \cdot) = \mathbb{P}_{i+1,i} \tilde{B}_i^+ U_{i+1}(0, \cdot) + G_i^+$$

Stabilité du problème couplé

$$B_i^- U_i(0, \cdot) = \mathbb{P}_{i-1,i} \tilde{B}_i^- U_{i-1}(J_{i-1} + 1, \cdot) + G_i^-$$

$$B_i^+ U_i(J_i + 1, \cdot) = \mathbb{P}_{i+1,i} \tilde{B}_i^+ U_{i+1}(0, \cdot) + G_i^+$$

$$E(U_i)(n) - E(U_i)(n-1) + \frac{c\Delta t_i}{2} [(\tilde{B}_{i-1}^+ U_i(0, n))^2 + (\tilde{B}_{i+1}^- U_i(J+1, n))^2]$$

$$= \frac{c\Delta t_i}{2} [(B_i^- U_i(0, n))^2 + (B_i^+ U_i(J+1, n))^2]$$

Stabilité du problème couplé

$$B_i^- U_i(0, \cdot) = \mathbb{P}_{i-1,i} \tilde{B}_i^- U_{i-1}(J_{i-1} + 1, \cdot) + G_i^-$$

$$B_i^+ U_i(J_i + 1, \cdot) = \mathbb{P}_{i+1,i} \tilde{B}_i^+ U_{i+1}(0, \cdot) + G_i^+$$

$$E(U_i)(n) - E(U_i)(n-1) + \frac{c\Delta t_i}{2} [(\tilde{B}_{i-1}^+ U_i(0, n))^2 + (\tilde{B}_{i+1}^- U_i(J+1, n))^2]$$

$$= \frac{c\Delta t_i}{2} [(B_i^- U_i(0, n))^2 + (B_i^+ U_i(J+1, n))^2]$$

QUE FAIRE ? Ecrire des conditions de transmission **homogènes**.

relèvement rétrograde discret

Théorème

Hyp : $\gamma_i < 1$ et $T < \inf_i \gamma_i (a_{i+1} - a_i)$.

$$B_i^- W_i^+ (0, \cdot) - \mathbb{P}_{i,i-1} \tilde{B}_i^- W_{i-1}^- (J_{i-1} + 1, \cdot) - G_i^- = R_{i,i-1},$$

$$B_{i-1}^+ W_{i-1}^- (J_{i-1} + 1, \cdot) - \mathbb{P}_{i-1,i} \tilde{B}_{i-1}^+ W_i^+ (0, \cdot) - G_{i-1}^+ = R_{i-1,i}$$

$R_{i,i-1} \in \text{orthogonal de } \text{Im } \mathbb{P}_{i,i-1} \text{ dans } V_i,$
 $R_{i-1,i} \in \text{orthogonal de } \text{Im } \mathbb{P}_{i-1,i} \text{ dans } V_{i-1}.$

Précision du schéma

Théorème

Hyp : $\gamma_i < 1$ et $2T < \inf_i \frac{\gamma_i}{c} (a_{i+1} - a_i)$

Alors le schéma est stable, globalement d'ordre 2 en temps et en espace.

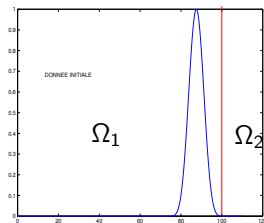
La projection



```
function b=transfer(a,ta,tb);
j=1;
for i=1 :n-1
b(i)=0;
m=ta(j+1)-tb(i);
while ta(j+1)<tb(i+1);
b(i)=b(i)+m*a(j);
j=j+1;
m=ta(j+1)-ta(j);
end;
m=m-(ta(j+1)-tb(i+1));
b(i)=b(i)+m*a(j);
end;
```

Soit un vecteur $\mathbf{t_a} = [0, t_a(1), \dots, T]$ arbitraire et a un vecteur représentant une fonction constante par morceaux sur $\mathbf{t_a}$, `transfer` calcule les intégrales de a sur les intervalles donnés par la grille en temps définie par le vecteur $\mathbf{t_b} = [0, t_b(1), \dots, T]$.

Cas simples



Données

$$c = 1; T = 200.$$

$$\Delta t_1 = 1; \Delta x_1 = 1, \quad \Delta t_2 = 0.5, \Delta x_2 = 0.5.$$

Comparaison avec d'autres méthodes

 $\gamma = 1$

	erreur max à gauche	erreur max à droite
erreur du schéma	1.6098e-15	1.4988e-15
D.D.	1.8319e-15	0.0089
Interpol.	1.9429e-15	0.0046
Energie	1.9971e-04	0.4949

Comparaison avec d'autres méthodes

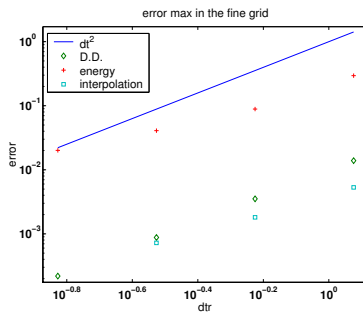
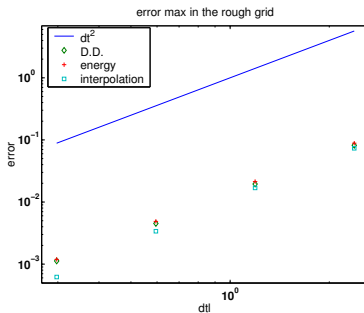
 $\gamma = 1$

	erreur max à gauche	erreur max à droite
erreur du schéma	1.6098e-15	1.4988e-15
D.D.	1.8319e-15	0.0089
Interpol.	1.9429e-15	0.0046
Energie	1.9971e-04	0.4949

 $\gamma = 0.9$

	erreur max à gauche	erreur max à droite
schéma fin	0.0022	0.0006
schéma grossier	0.009	0.003
D.D.	0.0068	0.0064
Interpol.	0.0068	0.0027
Energie	0.0068	0.0437

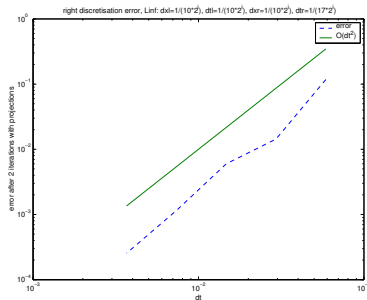
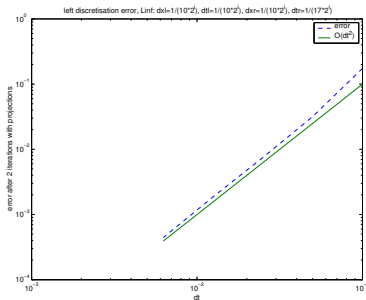
Ordre de la méthode



Extension à des vitesses différentes

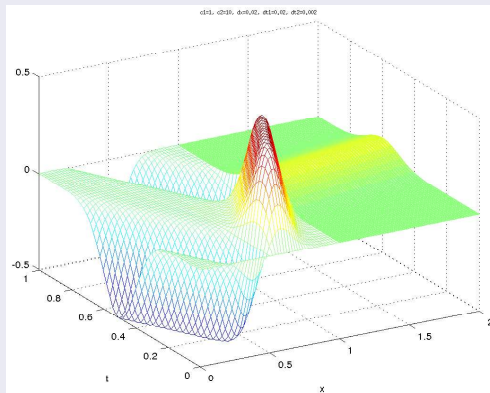
Données

$[0, 2]$ divisé en 2 parties égales, $T=1$; $c=1$ à gauche, $c=1.7$ à droite. On choisit $\gamma = 1$ partout, 11 points en espace dans chaque domaine, 11 points en temps à gauche et 18 à droite. Puis on divise le pas par 2.



Un plus grand contraste de vitesses

Exemple



$$c_1 = 1 \quad c_2 = 10; \Delta x_1 = \Delta x_2 = 0,02; \Delta t_1 = 0,02 \quad \Delta t_2 = 0,002$$

Résumé

- 1 Motivations
- 2 L'équation des ondes 1-D
 - Problème de transmission et algorithme de Schwarz
 - Le problème couplé : stabilité
 - L'algorithme discret : volumes finis
 - Performances numériques
- 3 L'équation d'advection-diffusion
 - L'algorithme de Schwarz
 - La méthode de Galerkin discontinu
 - Performances numériques
- 4 Conclusion et perspectives

Le problème

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(a(x)u) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f \quad \text{dans }]a, b[\times]0, T[$$

$$\text{C.L. } u(a, \cdot) = u(b, \cdot) = 0, \quad \text{C.I. } u(\cdot, 0) = u_0$$

Deux domaines, $a(x) = a_i$, $\nu(x) = \nu_i$ dans Ω_i , $a_i \geq 0$, $\nu_i > 0$, $i = 1, 2$.

Le principe

Algorithme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u_i^k &= f \text{ dans } \Omega_i \times]0, T[\\ (\nu_1 \frac{\partial}{\partial x} - a_1 + \Lambda_1)u_1^k(0, \cdot) &= (\nu_2 \frac{\partial}{\partial x} - a_2 + \Lambda_1)u_2^{k-1}(0, \cdot) \\ (\nu_2 \frac{\partial}{\partial x} - a_2 + \Lambda_2)u_2^k(0, \cdot) &= (\nu_1 \frac{\partial}{\partial x} - a_1 + \Lambda_2)u_1^{k-1}(0, \cdot) \\ \Lambda_1(u) &= \frac{a_2 + p_2}{2} + \frac{q_2}{2} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \Lambda_2(u) = \frac{a_1 - p_1}{2} - \frac{q_1}{2} \frac{\partial}{\partial t}\end{aligned}$$

taux de convergence

$$\delta_j(\omega) = \sqrt{a_j^2 + 4\nu_j i\omega}, \quad j = 1, 2.$$

$$\rho(\omega) = \left(\frac{\delta_1(\omega) - \textcolor{red}{p}_1 - \textcolor{blue}{q}_1 i\omega}{\delta_1(\omega) + a_2 - a_1 + \textcolor{red}{p}_2 + \textcolor{blue}{q}_2 i\omega} \right) \left(\frac{\delta_2(\omega) - \textcolor{red}{p}_2 - \textcolor{blue}{q}_2 i\omega}{\delta_2(\omega) + a_2 - a_1 + \textcolor{red}{p}_1 + \textcolor{blue}{q}_1 i\omega} \right)$$

$$\min_{p_1, p_2, q_1, q_2} \left(\max_{|\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta t}} |\rho(\omega)| \right)$$

Formulation faible (Johnson, Eriksson, Thomee 1985)

Le problème aux limites

$$\begin{aligned} u_t + au_x - \nu u_{xx} &= f(x, t) \quad \text{dans }]a, b[\times]0, T], \\ -\nu u_x + au + \alpha_0 u + \beta_0 u_t &= g_0(t), \quad \text{en } x = a, \\ \nu u_x - au + \alpha_1 u + \beta_1 u_t &= g_1(t), \quad \text{en } x = b. \end{aligned}$$

Formulation faible

$$\begin{aligned} ((u_t, v)) + \tilde{a}(u, v) &= \ell(v), \quad \forall v \in V = H^1([0, 1]) \\ ((u, v)) &:= (u, v) + \beta_1 u(1, t)v(1, t) + \beta_0 u(0, t)v(0, t) \\ \tilde{a}(u, v) &:= b(u, v) + \nu(u_x, v_x) - a(u, v_x) + \alpha_1 u(1, t)v(1, t) + \alpha_0 u(0, t)v(0, t) \\ \ell(v) &:= (f, v) + g_1(t)v(1, t) + g_0(t)v(0, t) \end{aligned}$$

Discrétisation par Galerkin discontinu

espaces d'éléments finis

$$[0, T] = \prod_{k=1}^K I_k, \quad I_k = [t_{k-1}, t_k].$$

$$v_+^k = \lim_{s \rightarrow 0^+} v(t_k + s), \quad v_-^k = \lim_{s \rightarrow 0^-} v(t_k + s),$$

V_h s.e.v. de dimension finie de V ,

$$\mathbf{P}_q(I_k) = \{v : I_k \longrightarrow V_h : v(t) = \sum_{i=0}^q v_i t^i, \quad v_i \in V_h\}$$

formulation

$$U_-^0 = u_0$$

Pour $k = 1, \dots, K$, étant donné U_-^{k-1} , trouver $U \equiv U|_{I_k} \in \mathbf{P}_q(I_k)$ tel que

$$\int_{I_k} [((\dot{U}, v)) + \tilde{a}(U, v)] dt + ((U_+^{k-1}, v_+^{k-1})) = \int_{I_k} \ell(v) dt + ((U_-^{k-1}, v_+^{k-1})), \quad \forall v \in \mathbb{P}_q(I_k)$$

Couplage avec SWR

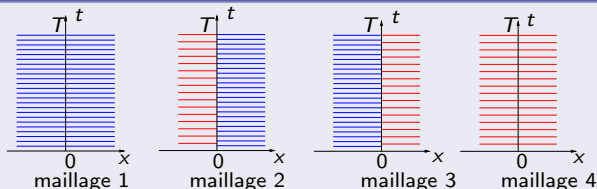
Projection des données d'interface sur les fonctions discontinues affines par morceaux.

Erreur L^2 versus le pas de temps. Cas homogène

Données physiques

Solution exacte $u(x, t) = \cos(x)\cos(t)$ sur $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. $\bar{\Omega}_1 = [0, 2]$ et $\bar{\Omega}_2 = [2, 2\pi]$. $a_1 = a_2 = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = 1$

les grilles

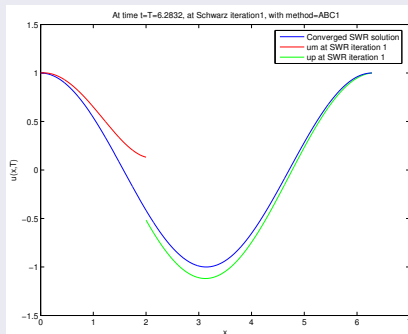


Maillages en temps conformes (maillage 1 et maillage 4)
et non conformes (maillage 2 et maillage 3).

Stopping Criterion : the jumps of interface conditions must be smaller than 10^{-6}

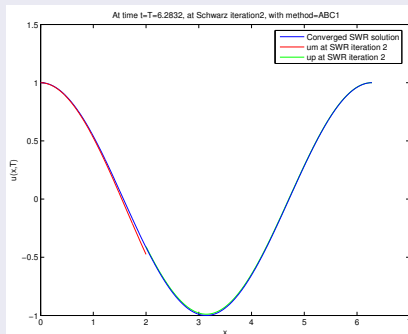
Solution au temps T

Itération 1



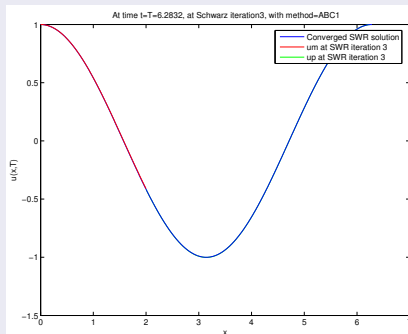
Solution au temps T

Itération 2

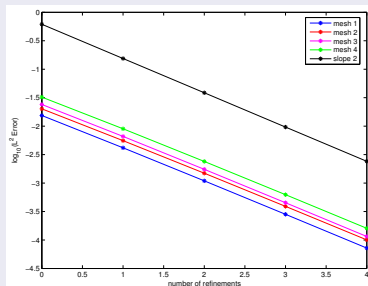


Solution au temps T

Itération 3



Courbes erreur



erreur $L^2(\Omega \times (0, T))$

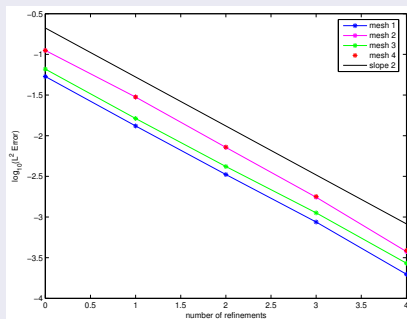
Un cas non homogène

données physiques

$(a, b) = (0, 6)$, coupé par le milieu. $T = 2$. $u_0 = \exp(-3 * (2.5 - x)^2)$.

A gauche $a_1 = 1, \nu_1 = 0.05$. A droite $a_2 = 0.3, \nu_2 = 1$.

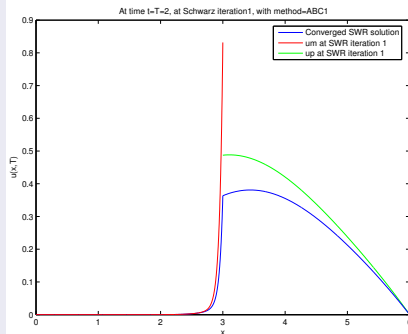
Courbe erreur



erreur $L^2(\Omega \times (0, T))$

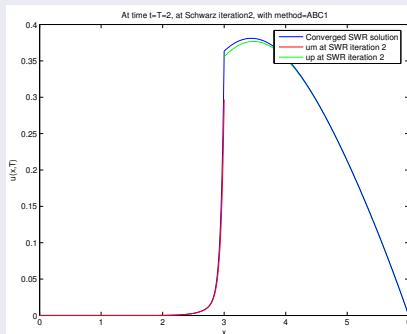
Solution au temps T

Itération 1



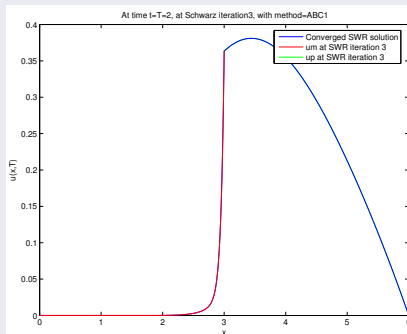
Solution au temps T

Itération 2



Solution au temps T

Itération 3



Résumé

- 1 Motivations
- 2 L'équation des ondes 1-D
 - Problème de transmission et algorithme de Schwarz
 - Le problème couplé : stabilité
 - L'algorithme discret : volumes finis
 - Performances numériques
- 3 L'équation d'advection-diffusion
 - L'algorithme de Schwarz
 - La méthode de Galerkin discontinu
 - Performances numériques
- 4 Conclusion et perspectives

Conclusion

Cadre de travail

Programme global avec applications en océanographie, combustion (ONERA), environnement (GDR Momas). Travaux déjà réalisés sur l'équation des ondes 1D et 2D (avec recouvrement), sur l'équation d'advection diffusion 1 et 2D, et sur le système de Saint-Venant (thèse de Véronique Martin)

SWR et raffinement

- SWR : Cadre efficace pour le raffinement en temps,

Conclusion

Cadre de travail

Programme global avec applications en océanographie, combustion (ONERA), environnement (GDR Momas). Travaux déjà réalisés sur l'équation des ondes 1D et 2D (avec recouvrement), sur l'équation d'advection diffusion 1 et 2D, et sur le système de Saint-Venant (thèse de Véronique Martin)

SWR et raffinement

- SWR : Cadre efficace pour le raffinement en temps,
- Etude d'erreur pour l'équation des ondes discrète en dimension 1,

Conclusion

Cadre de travail

Programme global avec applications en océanographie, combustion (ONERA), environnement (GDR Momas). Travaux déjà réalisés sur l'équation des ondes 1D et 2D (avec recouvrement), sur l'équation d'advection diffusion 1 et 2D, et sur le système de Saint-Venant (thèse de Véronique Martin)

SWR et raffinement

- SWR : Cadre efficace pour le raffinement en temps,
- Etude d'erreur pour l'équation des ondes discrète en dimension 1,
- Premiers résultats encourageants pour Galerkin discontinu en temps pour advection diffusion non homogène en dimension 1.

Perspectives

Raffinement

- Etude d'erreur pour l'équation des ondes en dimension 2 :étendre le lemme de relèvement discret.

Perspectives

Raffinement

- Etude d'erreur pour l'équation des ondes en dimension 2 :étendre le lemme de relèvement discret.
- Extension à Schrödinger et au non linéaire.

Perspectives

Raffinement

- Etude d'erreur pour l'équation des ondes en dimension 2 :étendre le lemme de relèvement discret.
- Extension à Schrödinger et au non linéaire.
- Mise en place complète de la décomposition couplée à Galerkin discontinu pour advection-diffusion en dimension 1, et 2.

Co-auteurs sur les méthodes de Schwarz-relaxation d'ondes

- En général : M. Gander (Université Genève).
- Pour l'équation des ondes 1D : F. Nataf (CNRS P6).
- Sur l'équation d'advection diffusion homogène : P. D'Anfray et J. Ryan (ONERA). V. Martin (Amiens).
- Sur les problèmes hétérogènes (application au stockage des déchets et au couplage océan-atmosphère) : C. Japhet (P13), M. Kern (INRIA), E. Blayo (Grenoble).
- Sur Galerkin discontinu : C. Japhet.
- Sur le couplage de modèles : V. Martin et C. Japhet, J. Ryan.
- Sur l'équation de Schrödinger et les problèmes non linéaires : J. Szeftel.
- Sur les équations du micromagnétisme : S. Labbé (P11) et K. Santugini (Genève)

<http://www.math.univ-paris13.fr/halpern>