



Méthode de synthèse modale pour la résolution des équations de la neutronique en formulation mixte duale, application à des calculs 3D hétérogènes

Pierre Guérin
pierre.guerin@cea.fr

*CEA SACLAY
DEN/DANS/DM2S/SERMA/LENR
91191 Gif sur Yvette Cedex*

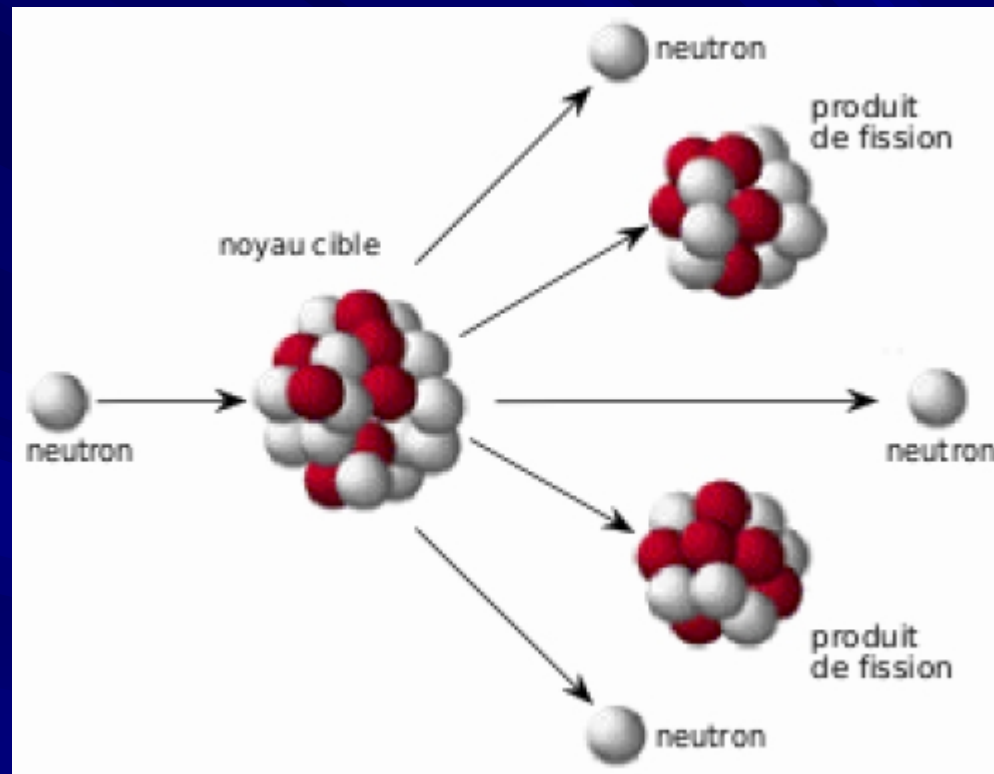
*Directeur de Thèse (Paris VI) : Yvon Maday
Encadrant CEA : Jean-Jacques Lautard*

Début de thèse : octobre 2004





- **Considérations générales et motivations**
- **La méthode de synthèse modale**
- **Une méthode de synthèse modale factorisée**
- **Parallélisation**
- **Conclusions et perspectives**

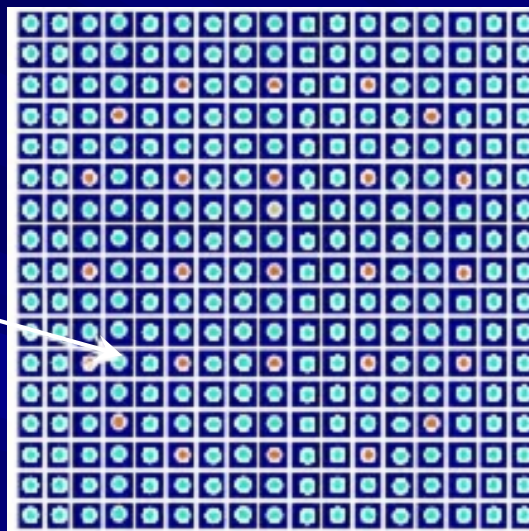


- Importance de la connaissance du flux de neutrons dans le cœur
 - Contrôle et équilibre de la réaction en chaîne
 - Optimisation du chargement en combustible du cœur

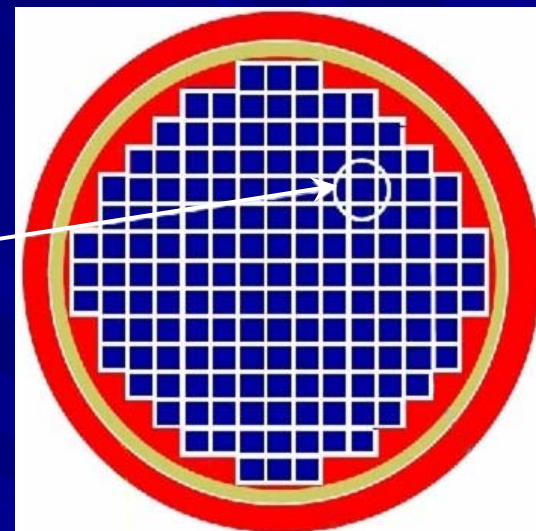
Géométrie d'un cœur PWR 900 Mwe



Crayon



assemblage



Cœur

■ Plusieurs modèles :

- o Diffusion
- o SPn
- o Transport

■ Solveur MINOS :

- o Méthode d'éléments finis pour les équations de la diffusion et SPn.
- o Calculs 3D cellule par cellule trop chers pour des applications industrielles.

■ Motivations :

- o Trouver une méthode numérique qui prenne en compte les hétérogénéités du cœur.
- o Utilisation d'ordinateurs en parallèle.



- **Considérations générales et motivations**
- **La méthode de synthèse modale**
- **Une méthode de synthèse modale factorisée**
- **Parallélisation**
- **Conclusions et perspectives**

Modèle de la diffusion monocinétique

- Problème critique de la diffusion monocinétique avec des conditions au bord de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} \vec{p} = -D\vec{\nabla} \varphi & \text{sur } \Omega \\ \operatorname{div}(\vec{p}) + \sigma_a \varphi = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \sigma_f \varphi & \text{sur } \Omega. \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$\vec{p}$: Courant
 φ : Flux

Problème aux valeurs propres

- Formulation variationnelle mixte duale :

trouver $(\vec{p}, \varphi, k_{\text{eff}}) \in H(\operatorname{div}, E) \times L^2(E) \times \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \int_E -\frac{1}{D} \vec{p} \cdot \vec{q} + \int_E \operatorname{div}(\vec{q}) \varphi = 0 \\ \int_E \operatorname{div}(\vec{p}) \psi + \int_E \sigma_a \varphi \psi = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \int_E \sigma_f \varphi \psi \end{cases}, \quad \forall (\vec{q}, \psi) \in H(\operatorname{div}, E) \times L^2(E).$$

- Seul le mode fondamental associé au k_{eff} le plus grand a un sens physique.

- Méthode CMS → problème aux valeurs propres
 → analyse des structures

- Les étapes de la méthode :
 - o Décomposition du cœur en K sous-domaines.
 - o Calcul avec le solveur MINOS des premiers modes propres du problème local sur chaque sous-domaine.
 - o Toutes ces fonctions propres locales forment un espace discret utilisé pour résoudre le problème global par une méthode de Galerkin.

- Décomposition en sous-domaines recouvrants : $E = \bigcup_{k=1}^K E_k$
- Calcul sur chaque E_k des N_k premiers modes locaux avec les conditions au bord globales sur ∂E , et $\vec{p} \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial E_k \setminus \partial E$:

Trouver $(\vec{p}_i^k, \varphi_i^k, \lambda_i^k) \in H_{0, \partial E_k \setminus \partial E}(\text{div}, E_k) \times L^2(E_k) \times R$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{E_k} -\frac{1}{D} \vec{p}_i^k \cdot \vec{q} + \int_{E_k} \text{div}(\vec{q}) \varphi_i^k = 0, \quad \forall (\vec{q}, \psi) \in H_{0, \partial E_k \setminus \partial E}(\text{div}, E_k) \times L^2(E_k), \\ \int_{E_k} \text{div}(\vec{p}_i^k) \psi + \int_{E_k} \sigma_a \varphi_i^k \psi = \frac{1}{\lambda_i^k} \int_{E_k} \sigma_f \varphi_i^k \psi, \quad \forall 1 \leq k \leq K, 1 \leq i \leq N_k, \end{array} \right.$$

avec $H_{0, \partial E_k \setminus \partial E}(\text{div}, E_k) = \{ \vec{q} \in H(\text{div}, E_k), \vec{q} \cdot \vec{n} = 0 \text{ on } \partial E_k \setminus \partial E \}$.

- Extension sur E par 0 ($\sim$) des modes locaux sur chaque E_k :

$$W = \text{Vect} \left\{ \tilde{p}_{i,d}^k \right\}_{\substack{1 \leq k \leq K \\ 1 \leq i \leq N_k, d}} \subset H(\text{div}, E) \quad \text{et} \quad V = \text{Vect} \left\{ \tilde{\varphi}_i^k \right\}_{\substack{1 \leq k \leq K \\ 1 \leq i \leq N_k}} \subset L^2(E).$$

→ espaces de fonctions définies sur E .

- Problème global résolu sur ces espaces :

Trouver $(\vec{p}_\delta, \varphi_\delta, \lambda_\delta) \in W \times V \times R$ tels que :

$$\begin{cases} \int_E -\frac{1}{D} \vec{p}_\delta \cdot \vec{q} + \int_E \text{div}(\vec{q}) \varphi_\delta = 0 \\ \int_E \text{div}(\vec{p}_\delta) \psi + \int_E \sigma_a \varphi_\delta \psi = \frac{1}{\lambda_\delta} \int_E \sigma_f \varphi_\delta \psi \end{cases}, \quad \forall (\vec{q}, \psi) \in W \times V.$$

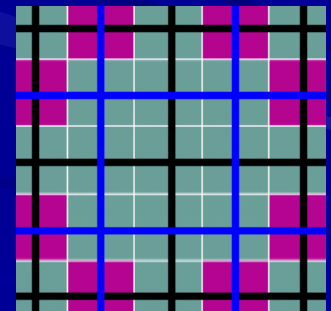
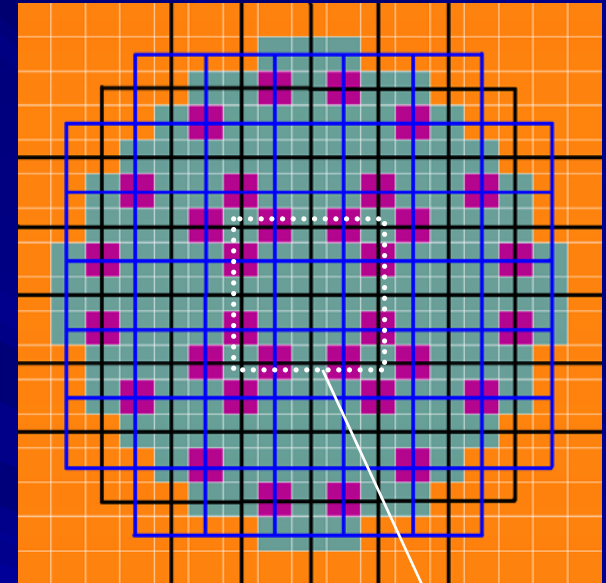
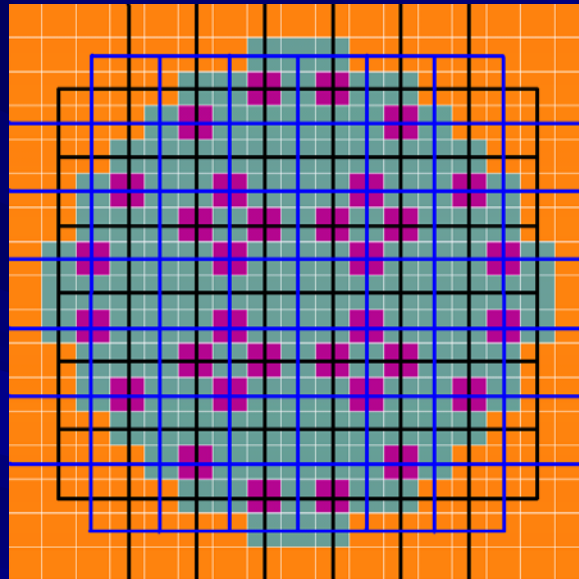
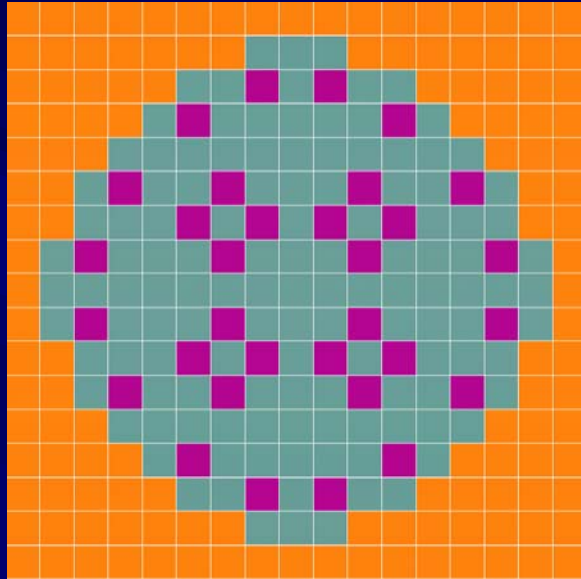
- Système linéaire (2D) : trouver (p_x, p_y, φ) et λ tels que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -A_x & 0 & B_x \\ 0 & -A_y & B_y \\ B_x^T & B_y^T & T_a \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \varphi \end{bmatrix}.$$

- H symétrique mais pas définie positive.

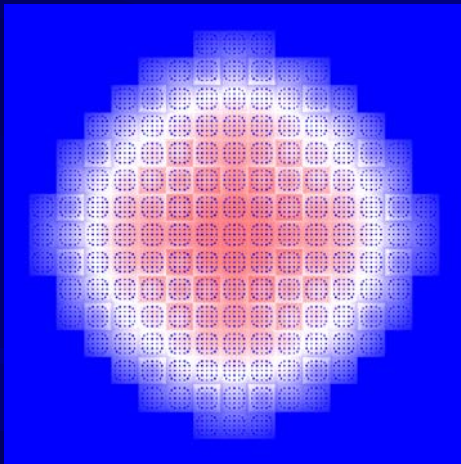
Décomposition de domaine

- Décomposition en 201 sous-domaines pour un cœur PWR 900 Mwe chargé avec des assemblages UOX et MOX :

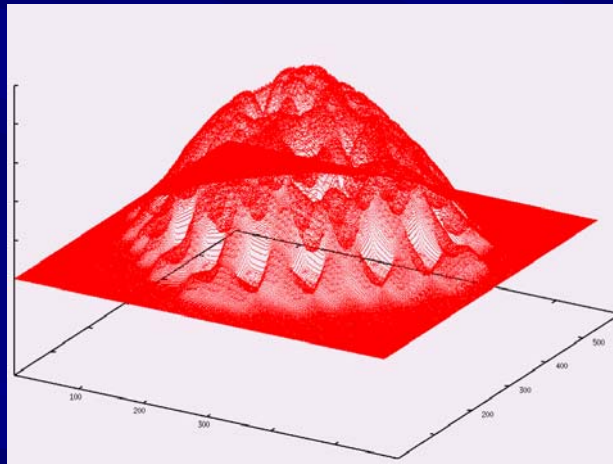


- Frontières internes des sous-domaines :
 - o Au milieu des assemblages.
 - o La condition au bord $\vec{p} \cdot \vec{n} = 0$ est proche de la valeur réelle.

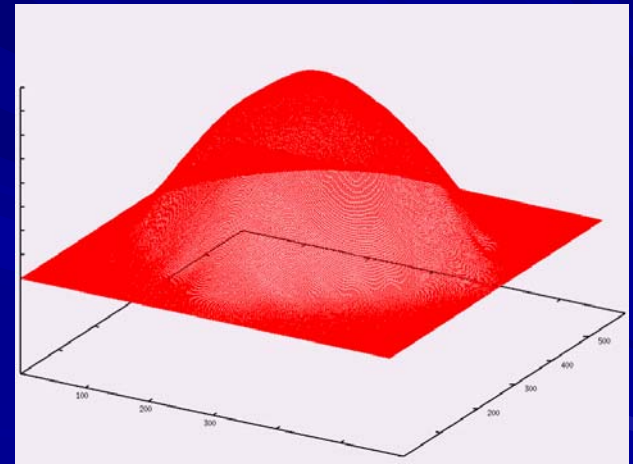
- Calcul de diffusion 2D
- 2 groupes d'énergie
- Maillage cellule



Puissance



Flux thermique



Flux rapide

- Différence sur le k_{eff} , normes L^2 et L^∞ de la différence de puissance entre la méthode CMS et MINOS en 2D.

Deux cas :

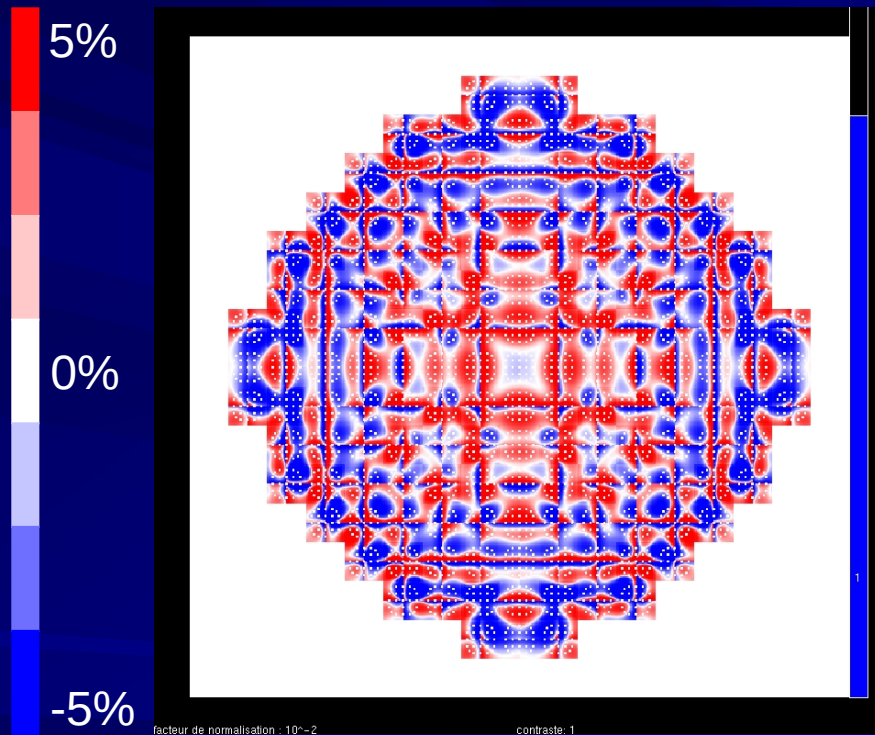
- 4 modes de flux et 6 de courant sur chaque sous-domaine
- 9 modes de flux et 11 de courant sur chaque sous-domaine

	4 modes	9 modes
Δk_{eff} (pcm)	4.4	1.4
$\ \Delta P\ _2$	3.8×10^{-3}	5.2×10^{-4}
$\ \Delta P\ _\infty$	5×10^{-2}	9.2×10^{-3}

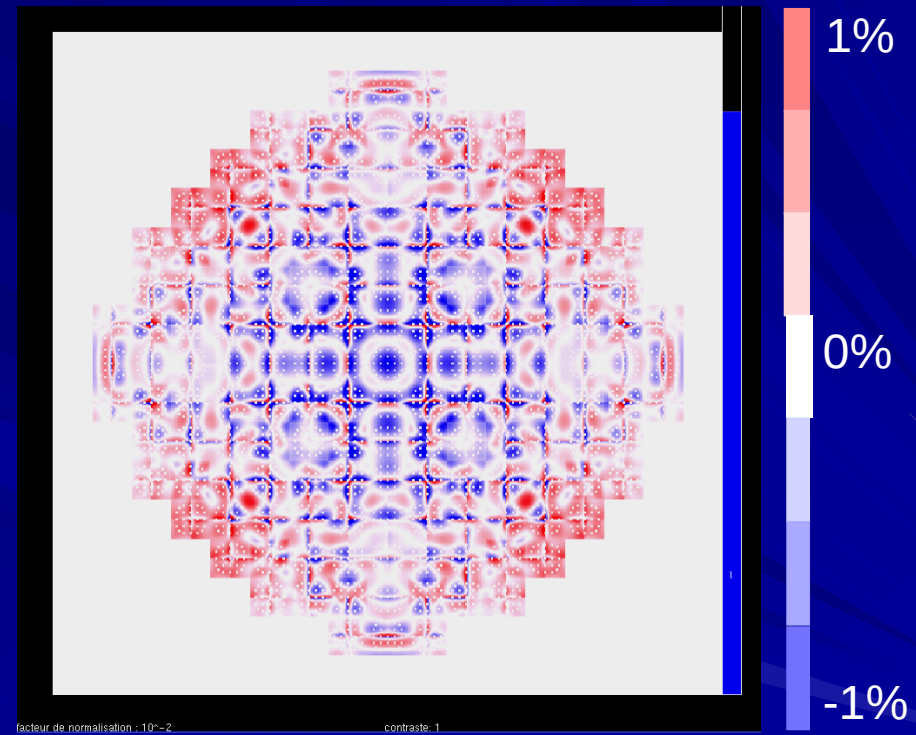
- Plus de modes de courant que de flux

Comparaison entre la méthode CMS et MINOS en 2D

- Différence de puissance entre la méthode CMS et MINOS en 2D.



4 modes de flux, 6 modes de courant



9 modes de flux, 11 modes de courant



- **Considérations générales et motivations**
- **La méthode de synthèse modale**
- **Une méthode de synthèse modale factorisée**
- **Parallélisation**
- **Conclusions et perspectives**

- But → réduire le temps CPU et le stockage mémoire en ne calculant que le mode fondamental sur chaque sous-domaine.
 - remplacer les modes d'ordres supérieurs par des fonctions bien choisies.
- Principe de factorisation sur un cœur périodique : $\phi_i \approx u_i \times \psi$.
 - o u_i est une fonction lisse solution d'un problème homogénéisé :
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\overline{D}\nabla u_i) = \frac{1}{\lambda_i} \overline{\sigma} u_i & \text{sur } E \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial E \end{cases},$$
 - o ψ est solution locale du problème en milieu infini.
- On veut utiliser ce principe sur un cœur non périodique pour remplacer les modes d'ordres supérieurs.

- Soient u_i^k solutions de :

→ solutions analytiques

→ sinus ou cosinus

→ pas besoin de calculs

$$\begin{cases} -\overline{D}\Delta u_i^k = \frac{\overline{\sigma}}{\lambda} u_i^k & \text{sur } E^k \\ \frac{\partial u_i^k}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial E^k \setminus \partial E, \quad 2 \leq i \leq N^k, 1 \leq k \leq K. \\ u_i^k = 0 & \text{sur } \partial E \cap \partial E_k \end{cases}$$
- Soit $(\psi^k, \vec{p}^k)$ le mode fondamental local sur chaque sous-domaine k .
- Nouvelles fonctions de base de courant $\tilde{p}_i^k \in H(\text{div}, E)$:

$$\begin{cases} \tilde{p}_{1,d}^k = p_d^k & \text{sur } E^k \\ \tilde{p}_{1,d}^k = 0 & \text{sur } E \setminus E^k \end{cases}$$

et

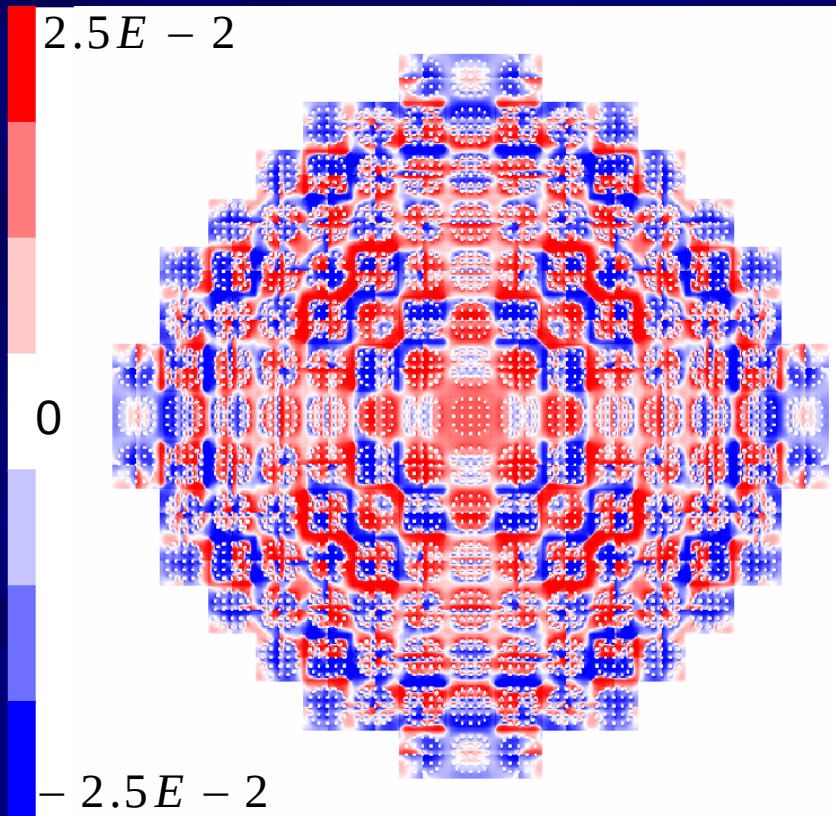
$$\begin{cases} \tilde{p}_{i,d}^k = \frac{\partial u_i^k}{\partial d} & \text{sur } E^k \quad (\text{if } \frac{\partial u_i^k}{\partial d} \neq 0) \\ \tilde{p}_{i,d}^k = 0 & \text{sur } E \setminus E^k \quad 2 \leq i \leq N^k, 1 \leq k \leq K \end{cases}.$$
- Nouvelles fonctions de base de flux $\tilde{\varphi}_i^k \in L^2(E)$:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1^k = \psi^k & \text{sur } E^k \\ \tilde{\varphi}_1^k = 0 & \text{sur } E \setminus E^k \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_i^k = \psi^k \times u_i^k & \text{sur } E^k \\ \tilde{\varphi}_i^k = 0 & \text{sur } E \setminus E^k \end{cases} \quad 2 \leq i \leq N^k, 1 \leq k \leq K.$$

- Même décomposition de domaine
- 6 modes de flux et 11 modes de courant
- Différences entre FCMS et MINOS en 2D :



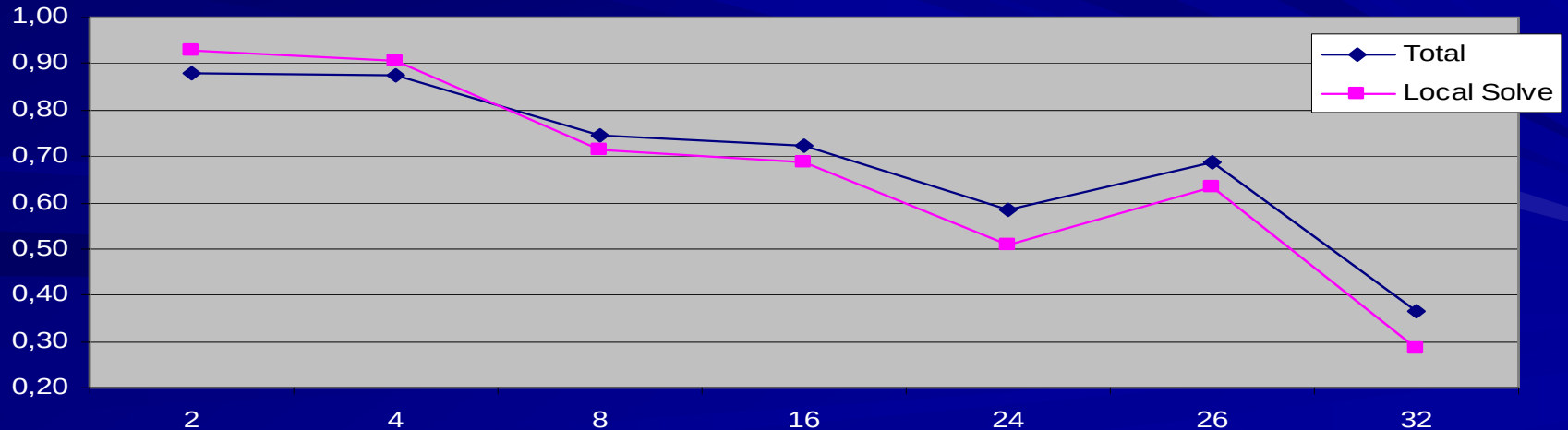
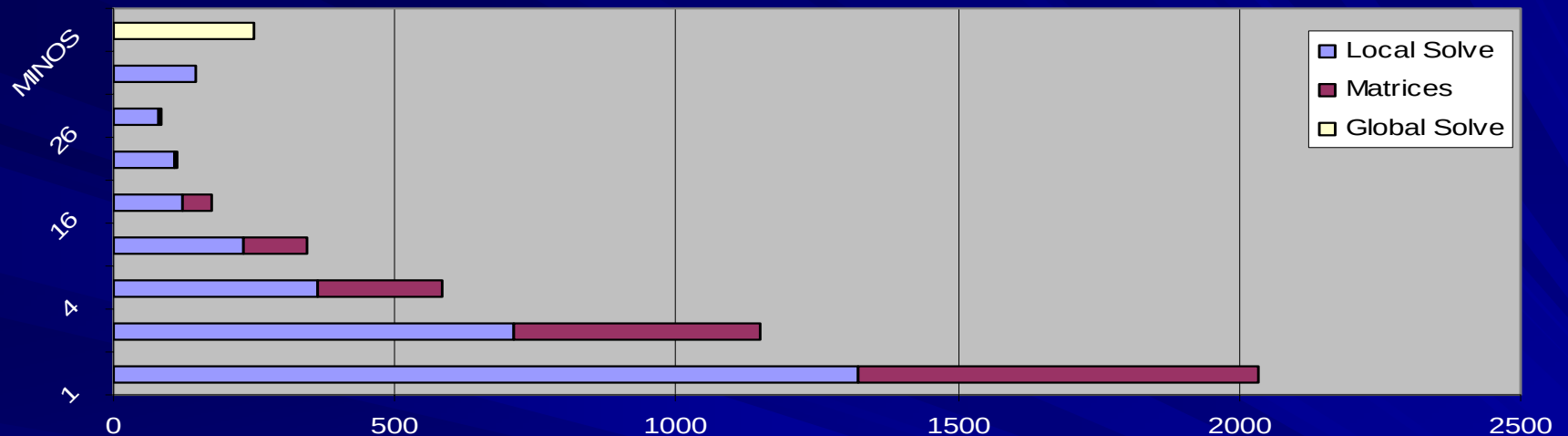
	FCMS
$\Delta k_{eff} \text{ (pcm)}$	2.2
$\ \Delta P\ _2$	2.8×10^{-3}
$\ \Delta P\ _\infty$	2.4×10^{-2}



- **Considérations générales et motivations**
- **La méthode de synthèse modale**
- **Une méthode de synthèse modale factorisée**
- **Parallélisation**
- **Conclusions et perspectives**

Parallélisation des méthodes CMS et FCMS en 3D

- Calculs locaux indépendants, calcul des matrices facile à paralléliser
- Résolution globale séquentielle mais rapide.





- **Considérations générales et motivations**
- **La méthode de synthèse modale**
- **Une méthode de synthèse modale factorisée**
- **Parallélisation**
- **Conclusions et perspectives**

■ Méthodes CMS et FCMS

- o Bonne précision pour le k_{eff} et la puissance locale.
- o Bien adaptées au calcul parallèle
 - les calculs locaux sont indépendants.
 - ils ne demandent aucune communication.

■ Développements futurs :

- o Extension à des calculs SP_n 3D.
- o Calculs sur des géométries complexes.
- o Calculs de cinétique.
- o Calculs de transport.