

Simulation numérique d'écoulements sanguins et interaction fluide-structure

Jean-Frédéric Gerbeau

Projet REO, INRIA, Rocquencourt

1 Motivations

- Une application clinique
- Une application en bio-ingénierie

2 Interaction fluide-structure en hémodynamique

- Formulation du problème
- Les difficultés
- Un nouvel algorithme

3 Quelques simulations

1 Motivations

- Une application clinique
- Une application en bio-ingénierie

2 Interaction fluide-structure en hémodynamique

- Formulation du problème
- Les difficultés
- Un nouvel algorithme

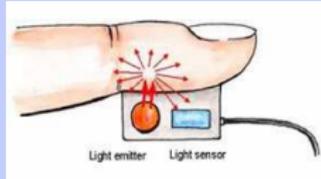
3 Quelques simulations

Pression arterielle

- Difficile à mesurer cliniquement à la sortie du coeur

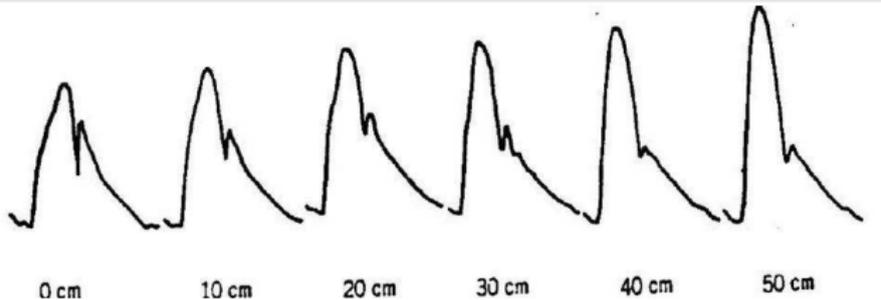
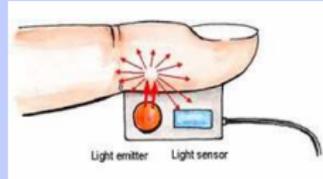
Pression arterielle

- Difficile à mesurer cliniquement à la sortie du coeur
- Facile à mesurer au bout du doigt (Finapres)



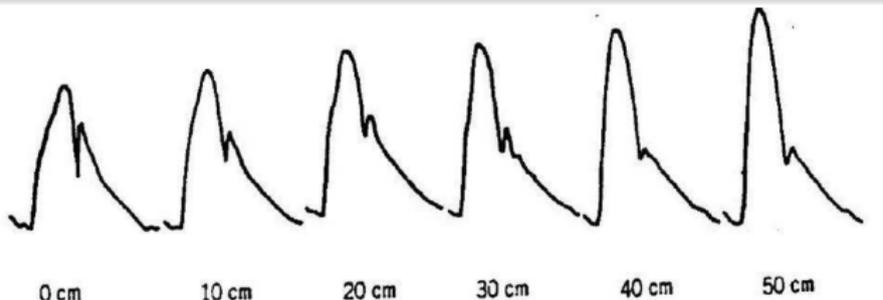
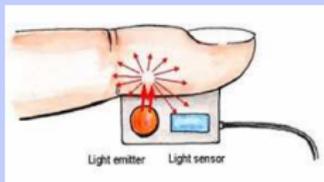
Pression artérielle

- Difficile à mesurer cliniquement à la sortie du coeur
- Facile à mesurer au bout du doigt (Finapres)



Pression artérielle

- Difficile à mesurer cliniquement à la sortie du coeur
- Facile à mesurer au bout du doigt (Finapres)

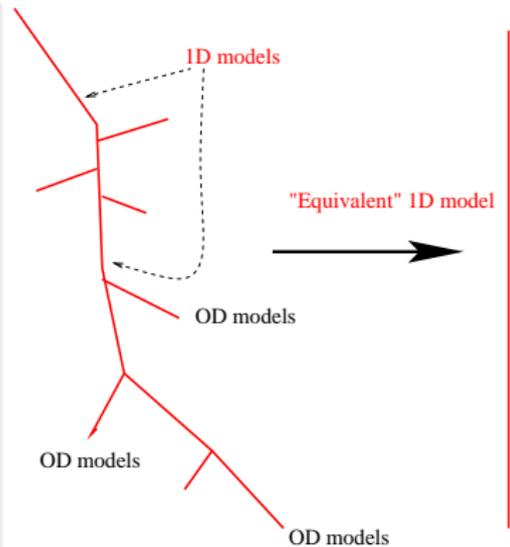


Modèles

- modèles non linéaires "1D" (type Saint Venant): trop complexes ici
- modèles "0D" (eq. dif. en temps) : pas assez !

Modèle réduit d'un compartiment vasculaire

(M. Sorine, E. Crépeau, Y. Papelier)

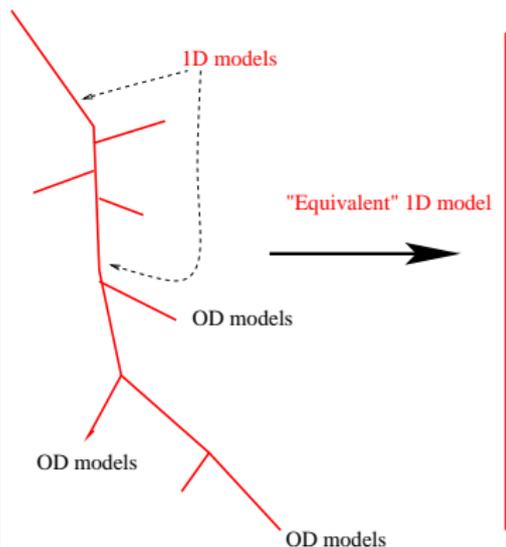


Modèle réduit d'un compartiment vasculaire

(M. Sorine, E. Crépeau, Y. Papelier)

- Développement asymptotique → équations de Korteweg de Vries

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (d_0 + d_1 p) \frac{\partial p}{\partial z} + d_2 \frac{\partial^3 p}{\partial z^3} = 0$$



Modèle réduit d'un compartiment vasculaire

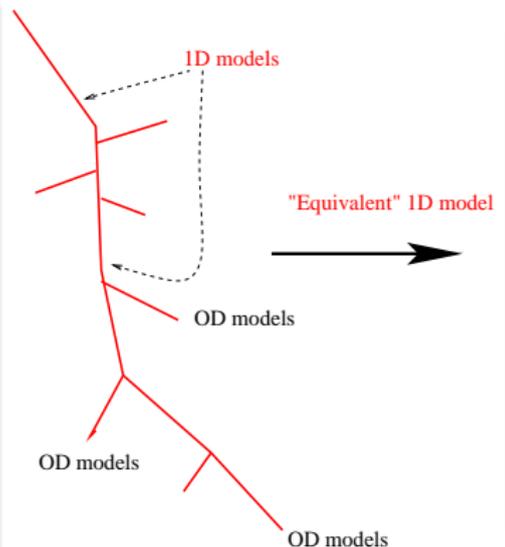
(M. Sorine, E. Crépeau, Y. Papelier)

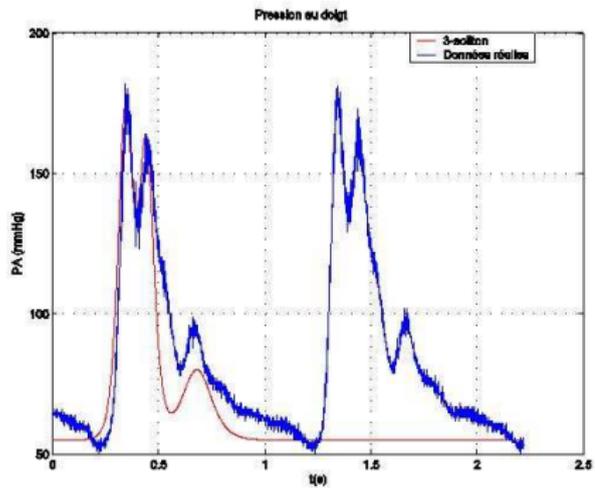
- Développement asymptotique → équations de Korteweg de Vries

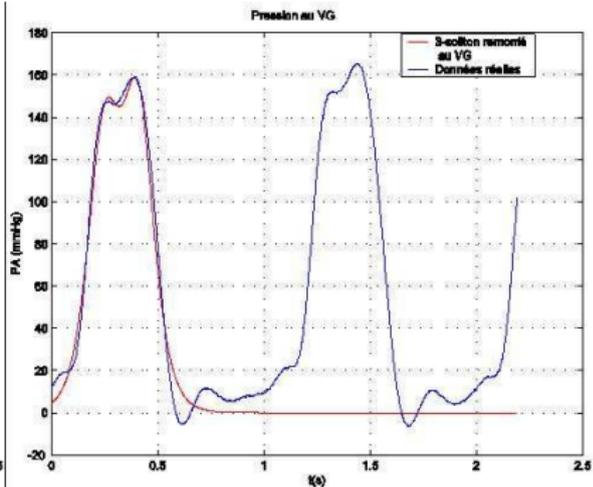
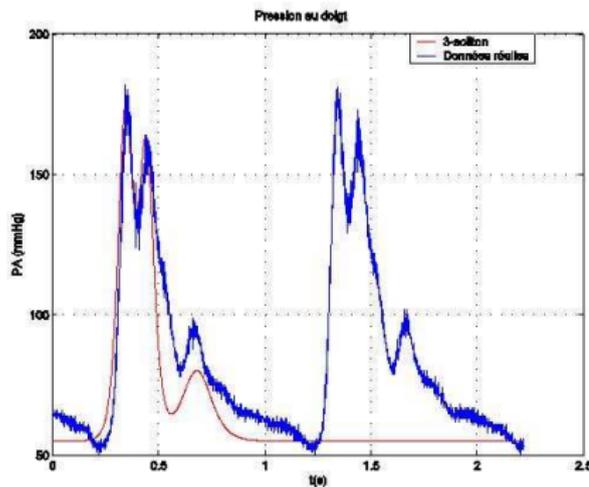
$$\frac{\partial p}{\partial t} + (d_0 + d_1 p) \frac{\partial p}{\partial z} + d_2 \frac{\partial^3 p}{\partial z^3} = 0$$

- Ecriture de la pression sous la forme:

$$P(z, t) = \sum_j P_{soliton}(\omega_j t - k_j z) + P_{0D}(t)$$







(Sorine, Crépeau, Papelier, 2005)

1 Motivations

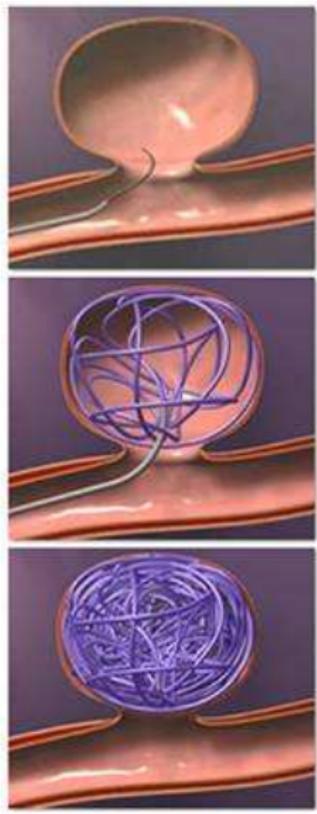
- Une application clinique
- Une application en bio-ingénierie

2 Interaction fluide-structure en hémodynamique

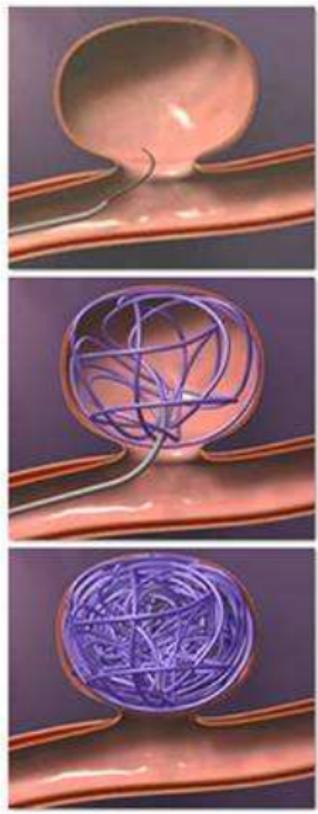
- Formulation du problème
- Les difficultés
- Un nouvel algorithme

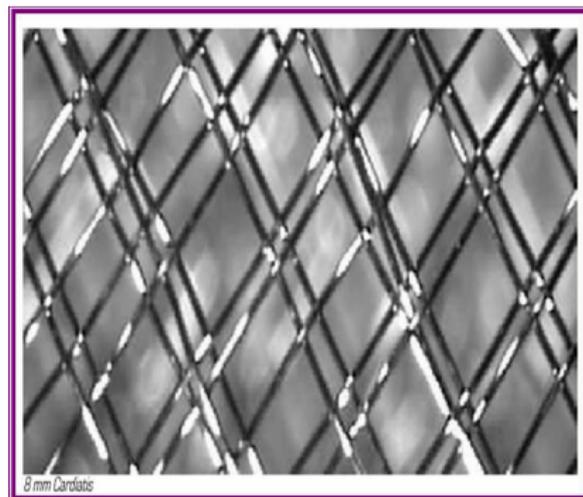
3 Quelques simulations

Anévrismes et stents



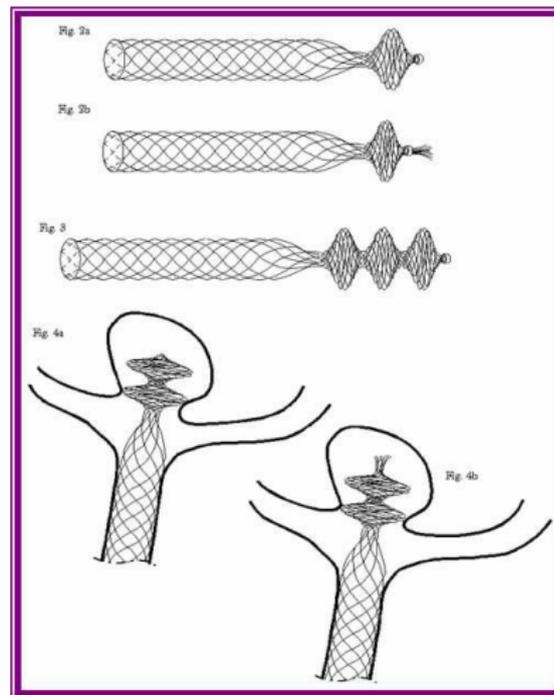
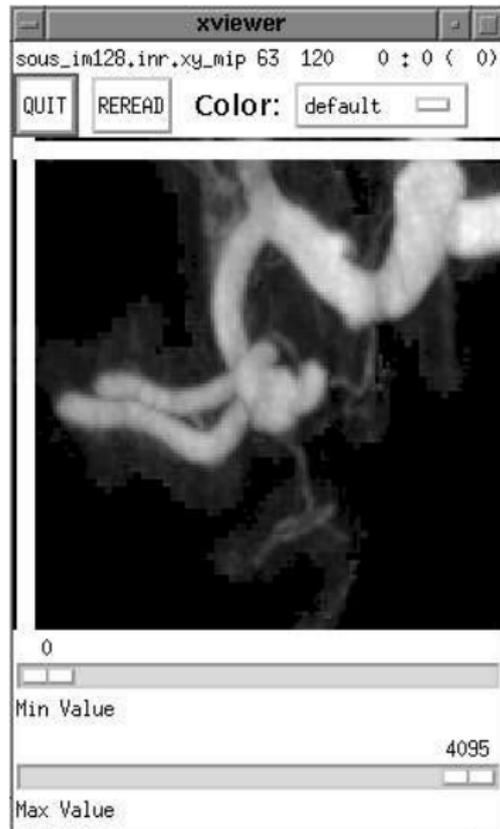
Anévrismes et stents



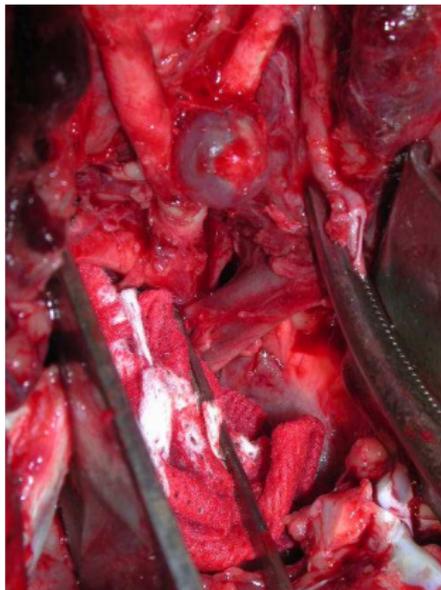


Maillage très fin et multicouche → plus besoin de *coils* !

Les stents de Cardiatis

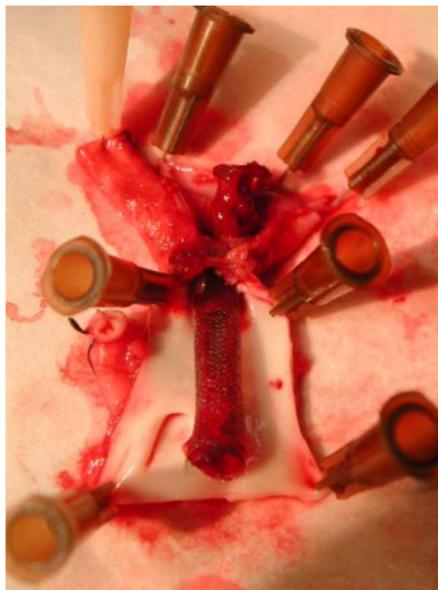
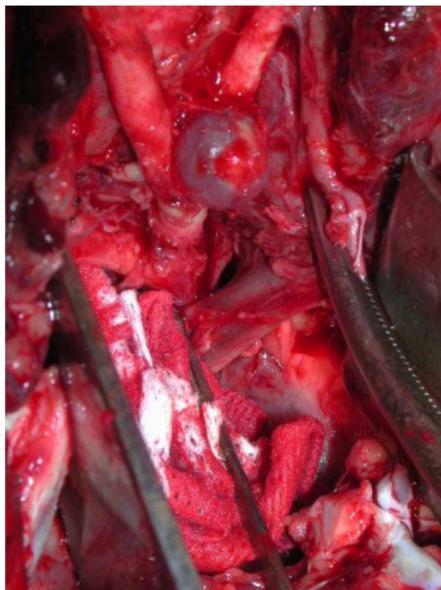


Stent "LyLyk", Cardiatis.



Cardiatis / C. Kang *et al.*, INRA/LTA, 2006

Les stents de Cardiatis



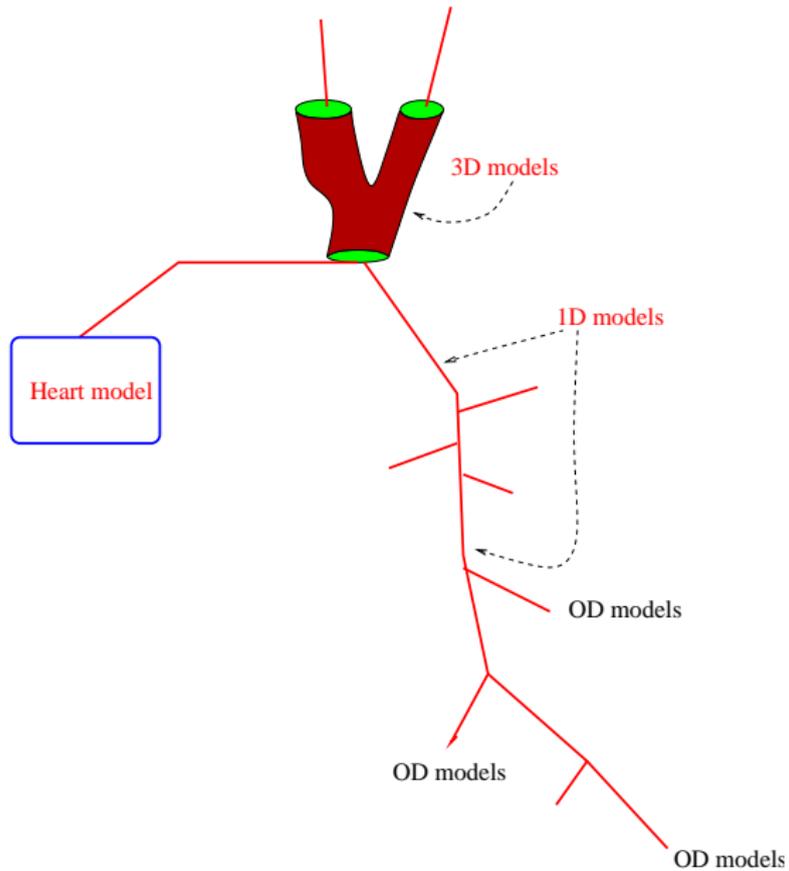
Cardiatis / C. Kang *et al.*, INRA/LTA, 2006

Simulations numériques

- perméabilité du stent / écoulement dans l'anévrisme
- perméabilité du stent / écoulement dans les artères collatérales
- contraintes mécaniques exercées sur le stent

Simulations numériques

- perméabilité du stent / écoulement dans l'anévrisme
- perméabilité du stent / écoulement dans les artères collatérales
- contraintes mécaniques exercées sur le stent
- ... nouvelles normes internationales !



1 Motivations

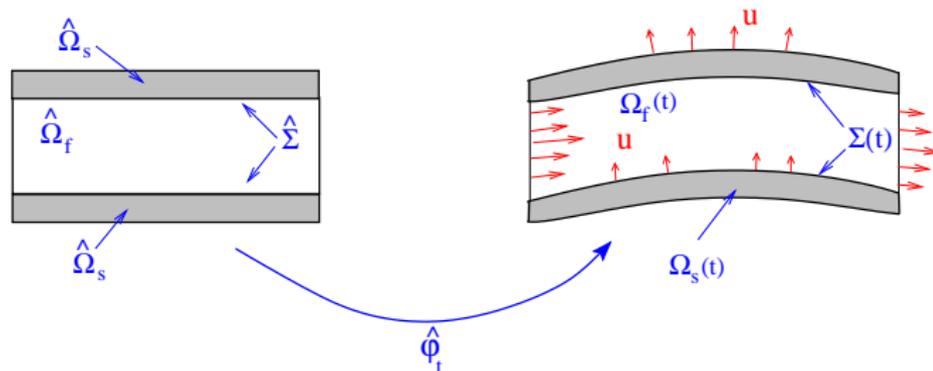
- Une application clinique
- Une application en bio-ingénierie

2 Interaction fluide-structure en hémodynamique

- Formulation du problème
- Les difficultés
- Un nouvel algorithme

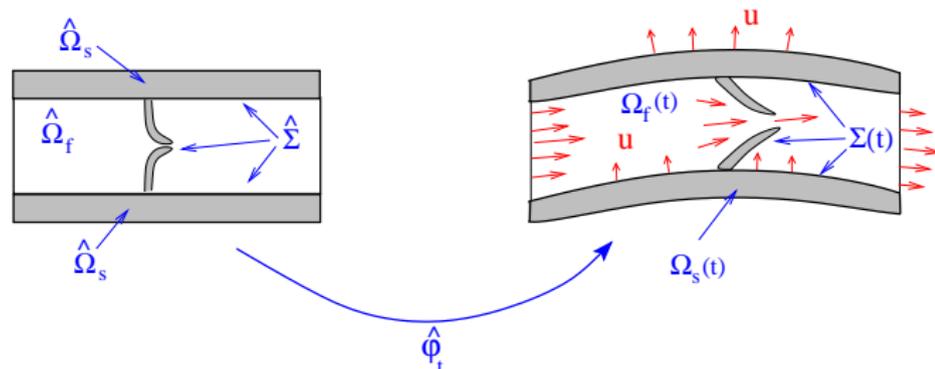
3 Quelques simulations

Interaction fluide structure



- Elasticité des **parois**
 - structure non linéaire
 - domaine fluide mobile

Interaction fluide structure



- Elasticité des **parois**
 - structure non linéaire
 - domaine fluide mobile
- **Valves** : structure immergée
 - très grands déplacements
 - contact

Interaction fluide structure

- Problème fluide:

$$\begin{aligned} \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} \Big|_{\hat{x}} + \rho_f (\mathbf{u}_f - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{u}_f - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}_f, p) &= 0 \quad \text{dans } \Omega_f(t) \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_f &= 0 \quad \text{dans } \Omega_f(t) \end{aligned}$$

Interaction fluide structure

- Problème fluide:

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} \Big|_{\hat{x}} + \rho_f (\mathbf{u}_f - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{u}_f - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}_f, p) = 0 \quad \text{dans } \Omega_f(t)$$
$$\operatorname{div} \mathbf{u}_f = 0 \quad \text{dans } \Omega_f(t)$$

- Vitesse du domaine fluide:

$$-\Delta \mathbf{w} = 0, \quad \text{dans } \Omega_f(t) \quad (\text{par exemple})$$

Interaction fluide structure

- Problème fluide:

$$\begin{aligned} \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} + \rho_f (\mathbf{u}_f - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{u}_f - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}_f, p) &= 0 \quad \text{dans } \Omega_f(t) \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_f &= 0 \quad \text{dans } \Omega_f(t) \end{aligned}$$

- Vitesse du domaine fluide:

$$-\Delta \mathbf{w} = 0, \quad \text{dans } \Omega_f(t) \quad (\text{par exemple})$$

- Problème de structure:

$$J \hat{\rho}_s \frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{\eta}}_s}{\partial t^2} - \operatorname{div}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\boldsymbol{\Pi}}_s = 0 \quad \text{dans } \hat{\Omega}_s$$

Interaction fluide structure

- Problème fluide:

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} + \rho_f (\mathbf{u}_f - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{u}_f - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}_f, \rho) = 0 \quad \text{dans } \Omega_f(t)$$
$$\operatorname{div} \mathbf{u}_f = 0 \quad \text{dans } \Omega_f(t)$$

- Vitesse du domaine fluide:

$$-\Delta \mathbf{w} = 0, \quad \text{dans } \Omega_f(t) \quad (\text{par exemple})$$

- Problème de structure:

$$J \hat{\rho}_s \frac{\partial^2 \hat{\eta}_s}{\partial t^2} - \operatorname{div}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\mathbf{P}}_s = 0 \quad \text{dans } \hat{\Omega}_s$$

Couplage : relations de transmission

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}_f(x, t) = \hat{\mathbf{u}}_s(\hat{\varphi}_t^{-1}(x), t) & \text{sur } \Sigma(t) \\ \hat{\mathbf{P}}_s \cdot \mathbf{n}_s + \hat{J} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_f(\mathbf{u}_f, \rho) \hat{\mathbf{F}}^{-T} \hat{\mathbf{n}}_f = 0 & \text{sur } \hat{\Sigma} \\ \mathbf{w} = \mathbf{u}_f & \text{sur } \Sigma(t) \end{array} \right.$$

Formulation "augmentée" du problème

Formellement:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_f(\mathbf{u}_f, \mathbf{v}_f) + \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_f \rangle_{\Sigma} = \int_{\Omega_f(t)} \mathbf{f}_f \cdot \mathbf{v}_f, \quad \forall \mathbf{v}_f \in X_f \\ \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}_f \rangle_{\Sigma} - \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}_s \rangle_{\Sigma} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \Lambda \\ \hat{a}_s(\hat{\mathbf{u}}_s, \hat{\mathbf{v}}_s) - \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_s \rangle_{\Sigma} = \int_{\hat{\Omega}_s} \hat{\mathbf{f}}_s \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_s \in \hat{X}_s \end{array} \right.$$

Formulation "augmentée" du problème

Formellement:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_f(\mathbf{u}_f, \mathbf{v}_f) + \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_f \rangle_{\Sigma} = \int_{\Omega_f(t)} \mathbf{f}_f \cdot \mathbf{v}_f, \quad \forall \mathbf{v}_f \in \mathbf{X}_f \\ \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}_f \rangle_{\Sigma} - \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}_s \rangle_{\Sigma} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \Lambda \\ \hat{\mathbf{a}}_s(\hat{\mathbf{u}}_s, \hat{\mathbf{v}}_s) - \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_s \rangle_{\Sigma} = \int_{\hat{\Omega}_s} \hat{\mathbf{f}}_s \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_s \in \hat{\mathbf{X}}_s \end{array} \right.$$

Chargement sur la structure:

$$\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_f \rangle_{\Sigma} = -\langle \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n}_f, \mathbf{v}_f \rangle_{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_s \rangle_{\Sigma} = \langle \mathbf{J} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_f \hat{\mathbf{F}}^{-T} \hat{\mathbf{n}}_s, \hat{\mathbf{v}}_s \rangle_{\Sigma}$$

Discrétisation de la contrainte cinématique:

$$\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}_f \rangle_{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}_s \rangle_{\Sigma}, \forall \boldsymbol{\mu} \in \Lambda$$

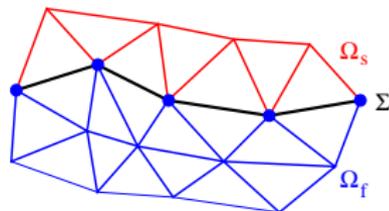
Discrétisation de la contrainte cinématique:

$$\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}_f \rangle_{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}_s \rangle_{\Sigma}, \forall \boldsymbol{\mu} \in \Lambda$$

Paroi: formulation ALE

Maillages conformes:

$$U_f = U_s$$



Discrétisation de la contrainte cinématique:

$$\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}_f \rangle_{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}_s \rangle_{\Sigma}, \forall \boldsymbol{\mu} \in \Lambda$$

Paroi: formulation ALE

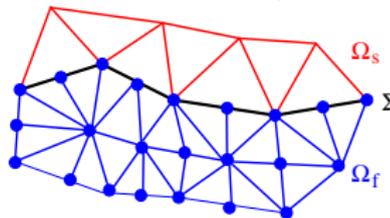
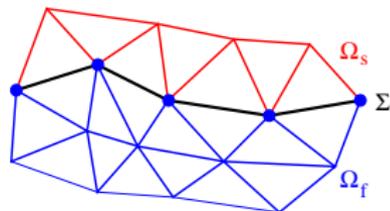
Maillages conformes:

$$U_f = U_s$$

Maillages non conformes:

$$U_f = KU_s$$

où K est p.ex. une matrice d'interpolation des noeuds solides



Discrétisation de la contrainte cinématique:

$$\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}_f \rangle_{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}_s \rangle_{\Sigma}, \forall \boldsymbol{\mu} \in \Lambda$$

Paroi: formulation ALE

Maillages conformes:

$$U_f = U_s$$

Maillages non conformes:

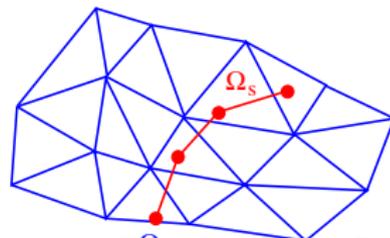
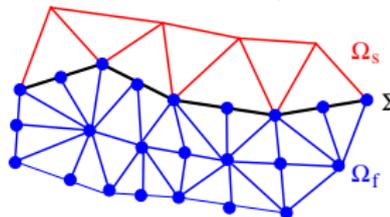
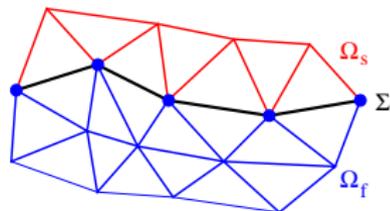
$$U_f = KU_s$$

où K est p.ex. une matrice d'interpolation des noeuds solides

Valve: "domaine fictif"

$$KU_f = U_s$$

où K est p.ex. une matrice d'interpolation des noeuds fluides



Egalité d'énergie:

Si $\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega_f \setminus \Sigma$:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega_f(t)} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}|^2 + \int_{\hat{\Omega}_s} \frac{\hat{J}\hat{\rho}_s}{2} |\hat{\mathbf{u}}_S|^2 \right] + \frac{d}{dt} \int_{\hat{\Omega}_s} W(\hat{\mathbf{E}}) + \int_{\Omega_f} 2\mu |\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})|^2 = 0$$

- Dissipation visqueuse.

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega_f(t)} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{u} &= - \int_{\Omega_f(t)} p \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \int_{\Omega_f(t)} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) - \int_{\Sigma(t)} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n}_f \\
 &= 2\mu \int_{\Omega_f(t)} |\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})|^2 + \int_{\hat{\Sigma}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \hat{\mathbf{F}}^{-T} \hat{\mathbf{n}}_S \hat{\mathbf{J}}
 \end{aligned}$$

- Energie élastique:

$$- \int_{\hat{\Omega}_s} \operatorname{div}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\boldsymbol{\Pi}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_S = \int_{\hat{\Omega}_s} \hat{\boldsymbol{\Pi}} : \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\mathbf{u}}_S - \int_{\hat{\Sigma}} \hat{\mathbf{u}}_S \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S$$

Les termes d'interface se compensent

- Dissipation visqueuse.

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega_f(t)} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{u} &= - \int_{\Omega_f(t)} \rho \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \int_{\Omega_f(t)} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) - \int_{\Sigma(t)} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n}_f \\
 &= 2\mu \int_{\Omega_f(t)} |\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})|^2 + \int_{\hat{\Sigma}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \hat{\mathbf{F}}^{-T} \hat{\mathbf{n}}_S \hat{\mathbf{J}}
 \end{aligned}$$

- Energie élastique:

$$- \int_{\hat{\Omega}_s} \operatorname{div}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\boldsymbol{\Pi}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_S = \int_{\hat{\Omega}_s} \hat{\boldsymbol{\Pi}} : \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\mathbf{u}}_S - \int_{\hat{\Sigma}} \hat{\mathbf{u}}_S \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S$$

Les termes d'interface se compensent

Après discretisation en temps:

- Couplage fort: $\int_{\hat{\Sigma}} \hat{\mathbf{u}}_S^{n+1} \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}}^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S = \int_{\hat{\Sigma}} \hat{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_f^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{F}}^{-T} \hat{\mathbf{n}}_S \hat{\mathbf{J}}$
- Couplage faible: $\int_{\hat{\Sigma}} \hat{\mathbf{u}}_S^{n+1} \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}}^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S \neq \int_{\hat{\Sigma}} \hat{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_f^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{F}}^{-T} \hat{\mathbf{n}}_S \hat{\mathbf{J}}$

1 Motivations

- Une application clinique
- Une application en bio-ingénierie

2 Interaction fluide-structure en hémodynamique

- Formulation du problème
- Les difficultés
- Un nouvel algorithme

3 Quelques simulations

Difficulté

Couplage faible → **instables** dans ce type de problèmes

Difficulté

Couplage faible → **instables** dans ce type de problèmes

Contrainte

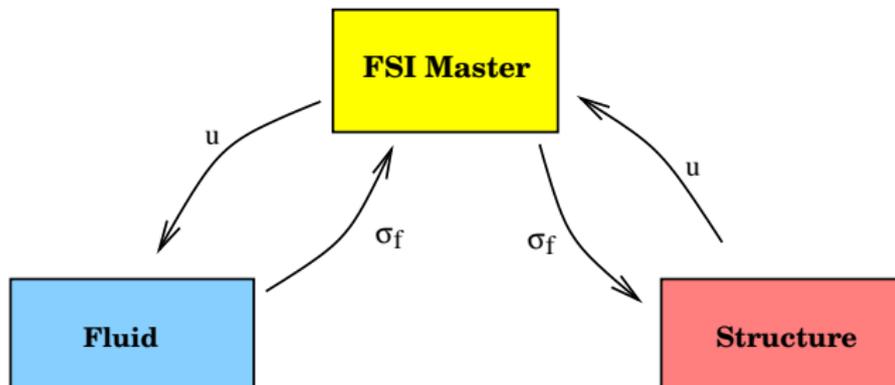
On veut utiliser des solveurs fluide et structure **distincts**

Difficulté

Couplage faible → **instables** dans ce type de problèmes

Contrainte

On veut utiliser des solveurs fluide et structure **distincts**

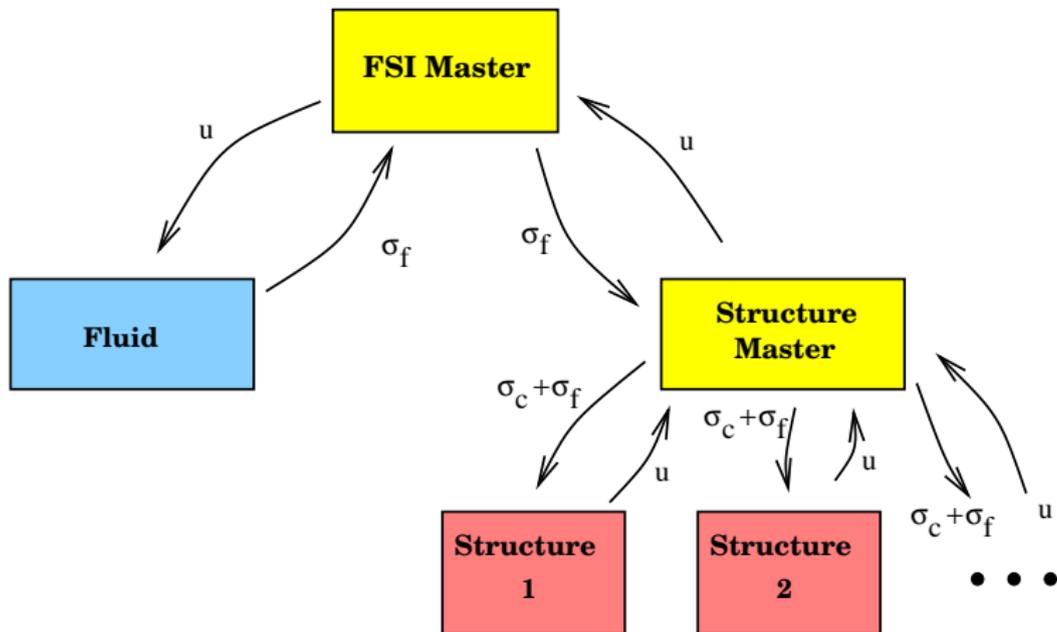


Difficulté

Couplage faible \rightarrow **instables** dans ce type de problèmes

Contrainte

On veut utiliser des solveurs fluide et structure **distincts**

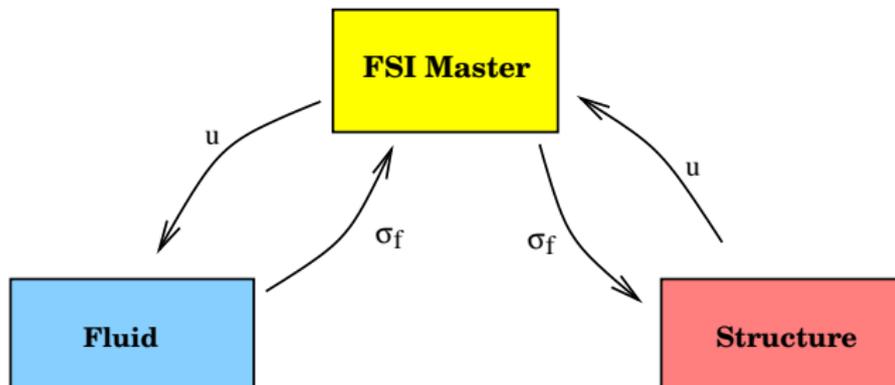


Difficulté

Couplage faible → **instables** dans ce type de problèmes

Contrainte

On veut utiliser des solveurs fluide et structure **distincts**



Décomposition de domaine hétérogène

(Le Tallec, 1999, Deparis, Discacciati, Quarteroni, 2004)

Opérateurs d'interface :

S_f : pour un déplacement λ donné sur Σ^n , résoudre le problème fluide et calculer la contrainte mécanique:

$$S_f(\lambda) = \sigma_f(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_f$$

Décomposition de domaine hétérogène

(Le Tallec, 1999, Deparis, Discacciati, Quarteroni, 2004)

Opérateurs d'interface :

S_f : pour un déplacement λ donné sur Σ^n , résoudre le problème fluide et calculer la contrainte mécanique:

$$S_f(\lambda) = \sigma_f(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_f$$

S_s : pour un déplacement λ donné sur $\hat{\Sigma}$, résoudre le problème de structure et calculer la contrainte mécanique:

$$S_s(\lambda) = \hat{\boldsymbol{\Pi}}_s(\hat{\boldsymbol{\eta}}^{n+1}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s$$

Décomposition de domaine hétérogène

(Le Tallec, 1999, Deparis, Discacciati, Quarteroni, 2004)

Opérateurs d'interface :

S_f : pour un déplacement λ donné sur Σ^n , résoudre le problème fluide et calculer la contrainte mécanique:

$$S_f(\lambda) = \sigma_f(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_f$$

S_s : pour un déplacement λ donné sur $\hat{\Sigma}$, résoudre le problème de structure et calculer la contrainte mécanique:

$$S_s(\lambda) = \hat{\mathbf{n}}_s(\hat{\boldsymbol{\eta}}^{n+1}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s$$

Conditions de transmission:

$$S_s(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\Sigma}^{n+1}) + S_f(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\Sigma}^{n+1}) = 0$$

Algorithmes de type Dirichlet-Neumann

Trouver $\hat{\eta}$ tel que: $\hat{\eta} = S_s^{-1}(-S_f(\hat{\eta}))$

Algorithmes de type Dirichlet-Neumann

Trouver $\hat{\eta}$ tel que: $\hat{\eta} = \mathbf{S}_s^{-1}(-\mathbf{S}_f(\hat{\eta}))$

- Point fixe + relaxation :

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_{k+1} &= (1 - \omega_k)\hat{\eta}_k + \omega_k \mathbf{S}_s^{-1}(-\mathbf{S}_f(\hat{\eta}_k)) \\ &= \hat{\eta}_k + \omega_k (\mathbf{S}_s^{-1}(-\mathbf{S}_f(\hat{\eta}_k)) - \hat{\eta}_k)\end{aligned}$$

Mok, Wall, Ramm, 2001

Algorithmes de type Dirichlet-Neumann

Trouver $\hat{\eta}$ tel que: $\hat{\eta} = S_s^{-1}(-S_f(\hat{\eta}))$

- Point fixe + relaxation :

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_{k+1} &= (1 - \omega_k)\hat{\eta}_k + \omega_k S_s^{-1}(-S_f(\hat{\eta}_k)) \\ &= \hat{\eta}_k + \omega_k (S_s^{-1}(-S_f(\hat{\eta}_k)) - \hat{\eta}_k)\end{aligned}$$

Mok, Wall, Ramm, 2001

- Newton + linesearch : $\mathcal{T}(\hat{\eta}) = -[S'_s(S_s^{-1}(-S_f(\hat{\eta})))]^{-1} \cdot S'_f(\hat{\eta})$:

$$\hat{\eta}_{k+1} = \hat{\eta}_k - \omega_k (\mathcal{T}(\hat{\eta}_k) - Id)^{-1} (S_s^{-1}(-S_f(\hat{\eta}_k)) - \hat{\eta}_k)$$

Fernández, Moubachir, 2003

Algorithmes de type Dirichlet-Neumann

Trouver $\hat{\eta}$ tel que: $\hat{\eta} = S_s^{-1}(-S_f(\hat{\eta}))$

- Point fixe + relaxation :

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_{k+1} &= (1 - \omega_k)\hat{\eta}_k + \omega_k S_s^{-1}(-S_f(\hat{\eta}_k)) \\ &= \hat{\eta}_k + \omega_k (S_s^{-1}(-S_f(\hat{\eta}_k)) - \hat{\eta}_k)\end{aligned}$$

Mok, Wall, Ramm, 2001

- Newton + linesearch : $\mathcal{T}(\hat{\eta}) = -[S'_s(S_s^{-1}(-S_f(\hat{\eta})))]^{-1} \cdot S'_f(\hat{\eta})$:

$$\hat{\eta}_{k+1} = \hat{\eta}_k - \omega_k (\mathcal{T}(\hat{\eta}_k) - Id)^{-1} (S_s^{-1}(-S_f(\hat{\eta}_k)) - \hat{\eta}_k)$$

Fernández, Moubachir, 2003

- Quasi-Newton + linesearch : soit $\tilde{\mathcal{T}}$ une approximation de \mathcal{T}

$$\hat{\eta}_{k+1} = \hat{\eta}_k - \omega_k (\tilde{\mathcal{T}}(\hat{\eta}_k) - Id)^{-1} (S_s^{-1}(-S_f(\hat{\eta}_k)) - \hat{\eta}_k)$$

Matthies, Steindorf, 2003

JFG, Vidrascu, 2003

Algorithmes de type Neumann-Neumann

Trouver $\hat{\eta}$ tel que: $\mathcal{S}_s(\hat{\eta}) + \mathcal{S}_f(\hat{\eta}) = 0$

$$\hat{\eta}_{k+1} = \hat{\eta}_k - \omega_k P_k^{-1} (\mathcal{S}_f(\hat{\eta}_k)) + \mathcal{S}_s(\hat{\eta}_k)$$

avec, par exemple,

$$P_k^{-1} = \alpha_f^k \mathcal{S}'_f(\hat{\eta}_k)^{-1} + \alpha_s^k \mathcal{S}'_s(\hat{\eta}_k)^{-1}$$

(S. Deparis, A. Quarteroni, et al., 2005)

Algorithmes de type Neumann-Neumann

Trouver $\hat{\eta}$ tel que: $S_s(\hat{\eta}) + S_f(\hat{\eta}) = 0$

$$\hat{\eta}_{k+1} = \hat{\eta}_k - \omega_k P_k^{-1} (S_f(\hat{\eta}_k)) + S_s(\hat{\eta}_k)$$

avec, par exemple,

$$P_k^{-1} = \alpha_f^k S_f'(\hat{\eta}_k)^{-1} + \alpha_s^k S_s'(\hat{\eta}_k)^{-1}$$

(S. Deparis, A. Quarteroni, et al., 2005)

Autres méthodes:

- *Hughes, Taylor et al., 2005*
- *Tezduyar et al., 2002*
- *van Brummelen et al., 2005*
- *Baaijens et al., 2004*

Algorithmes de type Neumann-Neumann

Trouver $\hat{\eta}$ tel que: $S_s(\hat{\eta}) + S_f(\hat{\eta}) = 0$

$$\hat{\eta}_{k+1} = \hat{\eta}_k - \omega_k P_k^{-1} (S_f(\hat{\eta}_k)) + S_s(\hat{\eta}_k)$$

avec, par exemple,

$$P_k^{-1} = \alpha_f^k S_f'(\hat{\eta}_k)^{-1} + \alpha_s^k S_s'(\hat{\eta}_k)^{-1}$$

(S. Deparis, A. Quarteroni, et al., 2005)

Autres méthodes:

- *Hughes, Taylor et al., 2005*
- *Tezduyar et al., 2002*
- *van Brummelen et al., 2005*
- *Baaijens et al., 2004*

Caractéristiques communes à tous ces algorithmes

- Tous sont **fortement couplés** pour la **stabilité**

Algorithmes de type Neumann-Neumann

Trouver $\hat{\eta}$ tel que: $S_s(\hat{\eta}) + S_f(\hat{\eta}) = 0$

$$\hat{\eta}_{k+1} = \hat{\eta}_k - \omega_k P_k^{-1} (S_f(\hat{\eta}_k) + S_s(\hat{\eta}_k))$$

avec, par exemple,

$$P_k^{-1} = \alpha_f^k S_f'(\hat{\eta}_k)^{-1} + \alpha_s^k S_s'(\hat{\eta}_k)^{-1}$$

(S. Deparis, A. Quarteroni, et al., 2005)

Autres méthodes:

- *Hughes, Taylor et al., 2005*
- *Tezduyar et al., 2002*
- *van Brummelen et al., 2005*
- *Baaijens et al., 2004*

Caractéristiques communes à tous ces algorithmes

- Tous sont **fortement couplés** pour la **stabilité**
- Surcoût important lié au couplage (**facteur entre 10 et 100**)

Pourquoi un couplage fort ?

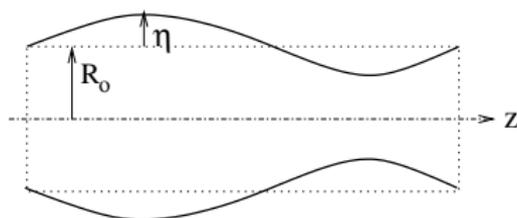
- *Le Tallec-Mouro, 2001* → importance de l'effet de **masse ajoutée**.

Pourquoi un couplage fort ?

- *Le Tallec-Mouro, 2001* → importance de l'effet de **masse ajoutée**.
- Analyse de stabilité sur un modèle simplifié (*Causin, JFG, Nobile, 2005*):

Pourquoi un couplage fort ?

- *Le Tallec-Mouro, 2001* → importance de l'effet de **masse ajoutée**.
- Analyse de stabilité sur un modèle simplifié (*Causin, JFG, Nobile, 2005*):



Structure 1D:

$$\rho_s \mathbf{e}_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \mathbf{a} \eta = \mathbf{p}$$

Fluide potentiel:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{array} \right.$$

Fluide potentiel:

$$\begin{cases} -\Delta p & = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} & = -\rho_f \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \end{cases}$$

\mathcal{M}_A : “masse-ajoutée” (inverse de l’opérateur de [Steklov-Poincaré](#)):

$$p|_{\Sigma} = -\rho_f \mathcal{M}_A \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Fluide potentiel:

$$\begin{cases} -\Delta p & = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} & = -\rho_f \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \end{cases}$$

\mathcal{M}_A : “masse-ajoutée” (inverse de l'opérateur de [Steklov-Poincaré](#)):

$$p|_{\Sigma} = -\rho_f \mathcal{M}_A \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Problème couplé:

$$\boxed{(\rho_s \mathbf{e}_s + \rho_f \mathcal{M}_A) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \mathbf{a} \eta = 0}$$

Fluide potentiel:

$$\begin{cases} -\Delta p & = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} & = -\rho_f \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \end{cases}$$

\mathcal{M}_A : “masse-ajoutée” (inverse de l’opérateur de **Steklov-Poincaré**):

$$p|_{\Sigma} = -\rho_f \mathcal{M}_A \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Problème couplé:

$$(\rho_s \mathbf{e}_s + \rho_f \mathcal{M}_A) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \mathbf{a} \eta = 0$$

Deux propriétés intéressantes:

- **Physique:** propriétés analogues de propagation
- **Numerique:** difficultés analogues de stabilité

- Couplage fort (un point-fixe doit être calculé)

$$\rho_s \mathbf{e}_s \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\delta t^2} + \mathbf{a} \eta^{n+1} = \mathbf{p}^{n+1}$$

$$\boxed{(\rho_s \mathbf{e}_s + \rho_f \mathcal{M}_A) \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\delta t^2} + \mathbf{a} \eta^{n+1} = 0}$$

- Couplage **fort** (un **point-fixe** doit être calculé)

$$\rho_s \mathbf{e}_s \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\delta t^2} + \mathbf{a} \eta^{n+1} = \mathbf{p}^{n+1}$$

$$\boxed{(\rho_s \mathbf{e}_s + \rho_f \mathcal{M}_A) \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\delta t^2} + \mathbf{a} \eta^{n+1} = 0}$$

- Couplage **faible** (algorithme “**décalé**”):

$$\rho_s \mathbf{e}_s \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\delta t^2} + \mathbf{a} \eta^n = \mathbf{p}^n$$

$$\boxed{\rho_s \mathbf{e}_s \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\delta t^2} + \rho_f \mathcal{M}_A \frac{\eta^n - 2\eta^{n-1} + \eta^{n-2}}{\delta t^2} + \mathbf{a} \eta^n = 0}$$

Proposition

- Soit μ_{max} la valeur propre maximale de \mathcal{M}_A . Si

$$\frac{\rho_f \mu_{max}}{\rho_s e_s} \geq 1$$

alors la méthode faiblement couplée est **inconditionnellement instable**

Proposition

- Soit μ_{max} la valeur propre maximale de \mathcal{M}_A . Si

$$\frac{\rho_f \mu_{max}}{\rho_s e_s} \geq 1$$

alors la méthode faiblement couplée est **inconditionnellement instable**

- La méthode de point fixe relaxée converge à condition que:

$$0 < \omega < \frac{2(\rho_s e_s + a\delta t^2)}{\rho_f \mu_{max} + \rho_s e_s + a\delta t^2}$$

Proposition

- Soit μ_{max} la valeur propre maximale de \mathcal{M}_A . Si

$$\frac{\rho_f \mu_{max}}{\rho_s e_s} \geq 1$$

alors la méthode faiblement couplée est **inconditionnellement instable**

- La méthode de point fixe relaxée converge à condition que:

$$0 < \omega < \frac{2(\rho_s e_s + a\delta t^2)}{\rho_f \mu_{max} + \rho_s e_s + a\delta t^2}$$

Remarques:

- d'autant plus critique que le fluide est lourd
- d'autant plus critique que le domaine est allongé
- instabilité indépendante du pas de temps

1 Motivations

- Une application clinique
- Une application en bio-ingénierie

2 Interaction fluide-structure en hémodynamique

- Formulation du problème
- Les difficultés
- Un nouvel algorithme

3 Quelques simulations

Une méthode faiblement couplée et stable

(Fernández, JFG, Grandmont, 2005)

- **Challenge :**
 - couplage faible & stabilité

Une méthode faiblement couplée et stable

(Fernández, JFG, Grandmont, 2005)

- **Challenge :**
 - couplage faible & stabilité
- **Première idée:**
 - traiter implicitement l'effet de masse ajoutée (linéaire !)
 - traiter explicitement (pour la couplage) les termes visqueux, et les non linéarités (géométrie et advection).

Une méthode faiblement couplée et stable

(Fernández, JFG, Grandmont, 2005)

- **Challenge :**
 - couplage faible & stabilité
- **Première idée:**
 - traiter implicitement l'effet de masse ajoutée (linéaire !)
 - traiter explicitement (pour la couplage) les termes visqueux, et les non linéarités (géométrie et advection).
- **Deuxième idée:**
 - la partie “masse ajoutée” de l'équation correspond à l'étape de projection de l'algorithme de **Chorin-Temam**.

Méthode de projection Chorin-Temam (1969)

Etape 1: advection-diffusion:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + \rho_f \tilde{\mathbf{u}}^n \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mu \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Etape 2: projection

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\delta t} + \nabla p^{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

ou toute autre variante (incrémentale, ...)

(J.L. Guermond et al., 1998-2004)

Méthode de projection semi-implicite en interaction fluide-structure:

Supposons connus Ω^n , \mathbf{u}^n , p^n , $\hat{\eta}^n$:

Etape 1: Extrapolation du domaine

$$\tilde{\eta}_{\Sigma}^{n+1} = \hat{\eta}^n + \delta t \left(\frac{3}{2} \hat{\mathbf{u}}_S^n - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_S^{n-1} \right)$$

$$\mathbf{w}_{\Sigma}^{n+1} = \frac{\tilde{\eta}_{\Sigma}^{n+1} - \hat{\eta}^n|_{\Sigma}}{\delta t}$$

Méthode de projection semi-implicite en interaction fluide-structure:

Supposons connus Ω^n , \mathbf{u}^n , ρ^n , $\hat{\eta}^n$:

Etape 1: Extrapolation du domaine

$$\tilde{\eta}_{\Sigma}^{n+1} = \hat{\eta}^n + \delta t \left(\frac{3}{2} \hat{\mathbf{u}}_S^n - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_S^{n-1} \right)$$

$$\mathbf{w}_{\Sigma}^{n+1} = \frac{\tilde{\eta}_{\Sigma}^{n+1} - \hat{\eta}^n|_{\Sigma}}{\delta t}$$

Etape 2: étape ALE-Advection-diffusion (couplage explicite)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} \Big|_{\hat{x}} + \rho_f (\tilde{\mathbf{u}}^n - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mu \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = 0 & \text{dans } \Omega_f^{n+1} \\ \tilde{\mathbf{u}}_S^{n+1} = \mathbf{w}_{\Sigma}^{n+1} & \text{sur } \Sigma^{n+1} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{w}^{n+1} = Tr^{-1}(\mathbf{w}_{\Sigma}^{n+1})$$

Etape 3: Projection (couplage implicite)

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\delta t} + \nabla p^{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega_f^{n+1} \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega_f^{n+1} \\ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = \frac{\hat{\eta}^{n+1} - 2\hat{\eta}^n + \hat{\eta}^{n-1}}{\delta t} \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Sigma^{n+1} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_s \frac{\hat{\mathbf{u}}_S^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_S^n}{\delta t} - \hat{\operatorname{div}} \left(\frac{\hat{\Pi}^{n+1} + \hat{\Pi}^n}{2} \right) = 0 \text{ dans } \hat{\Omega}_s \\ \frac{\hat{\eta}^{n+1} - \hat{\eta}^n}{\delta t} = \frac{\hat{\mathbf{u}}_S^{n+1} + \hat{\mathbf{u}}_S^n}{2} \text{ dans } \hat{\Omega}_s \\ \hat{\Pi}^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = p^{n+1} \mathbf{n}_s - \mu (\nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1})^T) \cdot \mathbf{n}_s \end{array} \right.$$

Couplage faible

Energie parasite :

$$\int_{\hat{\Sigma}} 2\mu \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}_s^{n+1})$$

$$(\sigma_f(\mathbf{u}_f, p) = 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) - p \mathbf{Id}).$$

Couplage faible

Energie parasite :

$$\int_{\hat{\Sigma}} 2\mu \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}_s^{n+1})$$

$$(\sigma_f(\mathbf{u}_f, p) = 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) - p \mathbf{Id}).$$

Proposition

Dans des cas simplifiés (structure linéaire 2D, fluide 3D linéaire), si

$$\rho_s \geq C \left(\rho_f h_f + \frac{2\mu \delta t}{h_f} \right).$$

alors le schéma est stable dans la norme de l'énergie

Couplage faible

Energie parasite :

$$\int_{\hat{\Sigma}} 2\mu \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}_s^{n+1})$$

$$(\sigma_f(\mathbf{u}_f, p) = 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) - p \mathbf{Id}).$$

Proposition

Dans des cas simplifiés (structure linéaire 2D, fluide 3D linéaire), si

$$\rho_s \geq C \left(\rho_f h_f + \frac{2\mu \delta t}{h_f} \right).$$

alors le schéma est stable dans la norme de l'énergie

Numériquement

stable sur une très large plage de paramètres

Cylindre droit: 50 pas de temps $\delta t = 2 \times 10^{-4}$ s.

COUPLAGE	ALGORITHME	CPU TOTAL (normalisé)
Implicite	Point fixe	approx. 50
	Point fixe + Aitken (2001)	24.86
	quasi-Newton (2003)	6.05
	Newton (2003)	4.77

Cylindre droit: 50 pas de temps $\delta t = 2 \times 10^{-4}$ s.

COUPLAGE	ALGORITHME	CPU TOTAL (normalisé)
Implicite	Point fixe	approx. 50
	Point fixe + Aitken (2001)	24.86
	quasi-Newton (2003)	6.05
	Newton (2003)	4.77
Proj. Semi-Implicite	Newton (2005)	1

Cylindre droit: 50 pas de temps $\delta t = 2 \times 10^{-4}$ s.

COUPLAGE	ALGORITHME	CPU TOTAL (normalisé)
Implicite	Point fixe	approx. 50
	Point fixe + Aitken (2001)	24.86
	quasi-Newton (2003)	6.05
	Newton (2003)	4.77
Proj. Semi-Implicite	Newton (2005)	1

Remarque: tous ces algorithmes sont testés sur le même code fluide (LiFE-V) et structure (Modulef).

1 Motivations

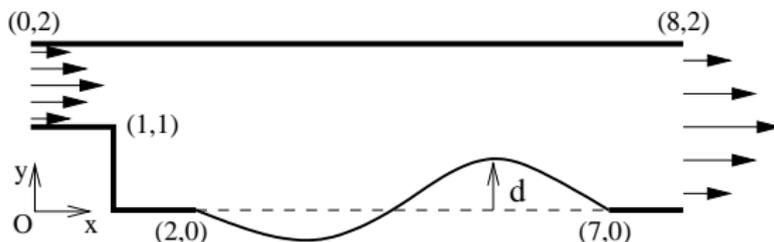
- Une application clinique
- Une application en bio-ingénierie

2 Interaction fluide-structure en hémodynamique

- Formulation du problème
- Les difficultés
- Un nouvel algorithme

3 Quelques simulations

Bilan d'énergie



Fluide : $\rho_f = 1$, $\mu = 0.01$

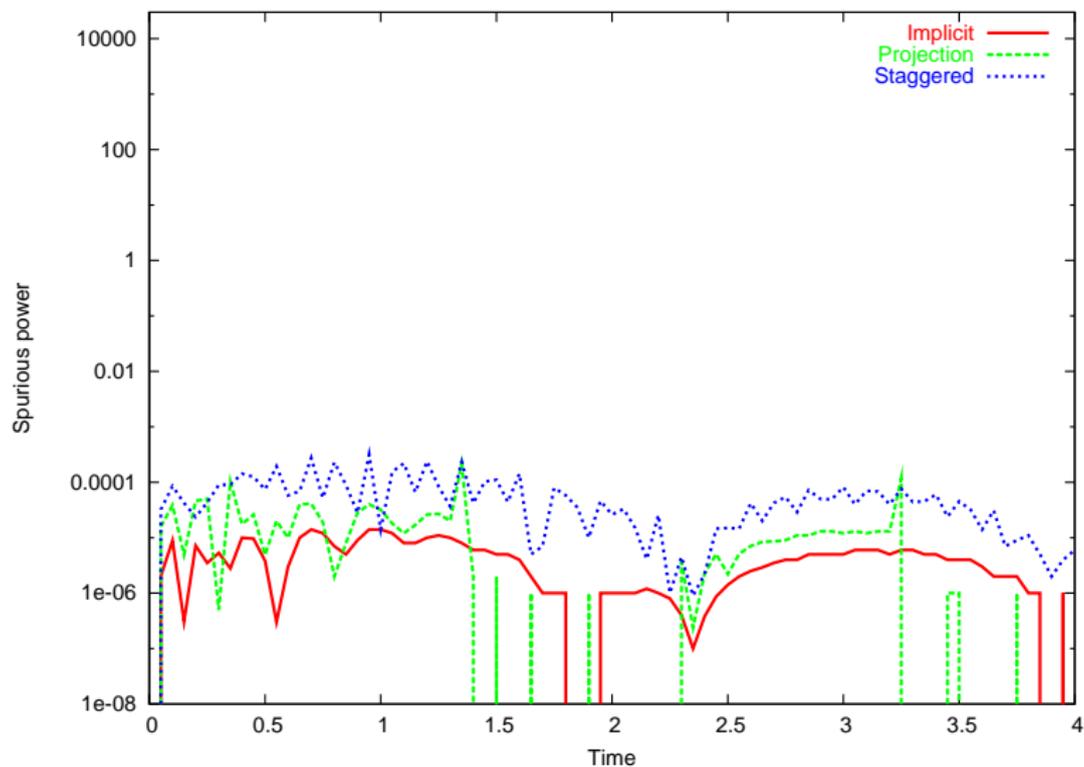
Structure: $\rho_s = 1000$, $e_s = 0.02$, $E = 250$, $k = 10$, $\gamma = 0.1$

$$\rho_s e_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - k G e_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{E e_s}{1 - \nu^2} \frac{\eta}{R_0^2} - \gamma \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^2 \partial t} = \mathbf{f}_\Sigma$$

[Algorithme de projection]

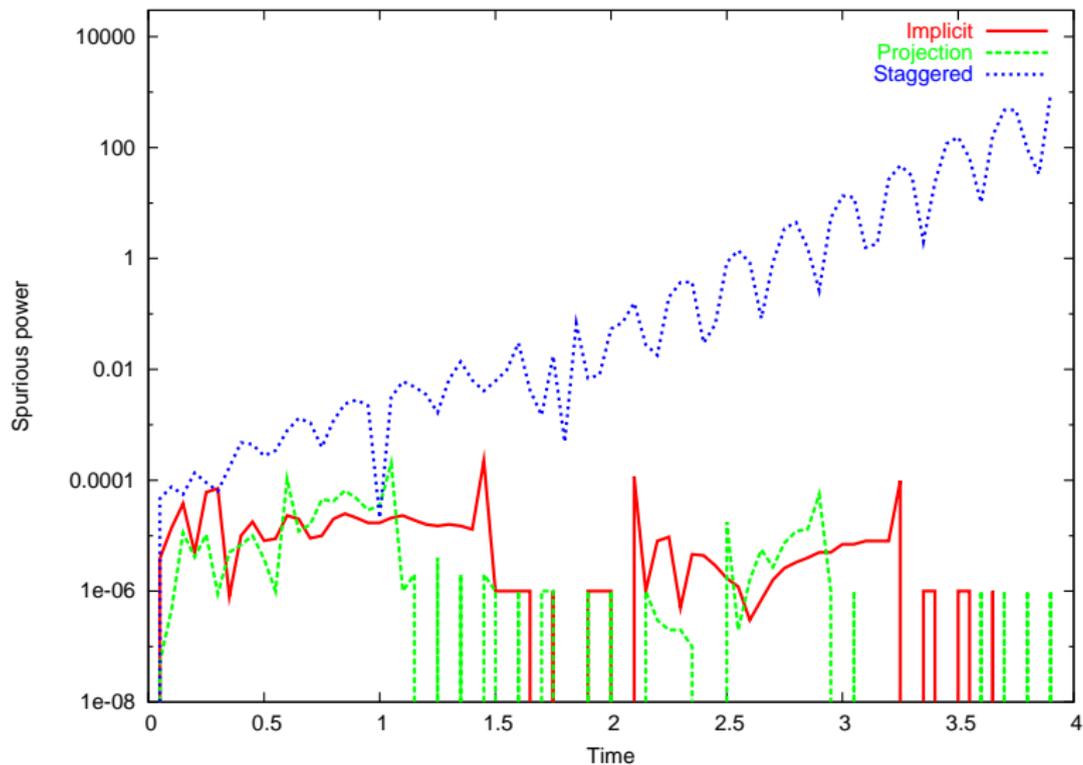
[Algorithme décalé]

Bilan d'énergie



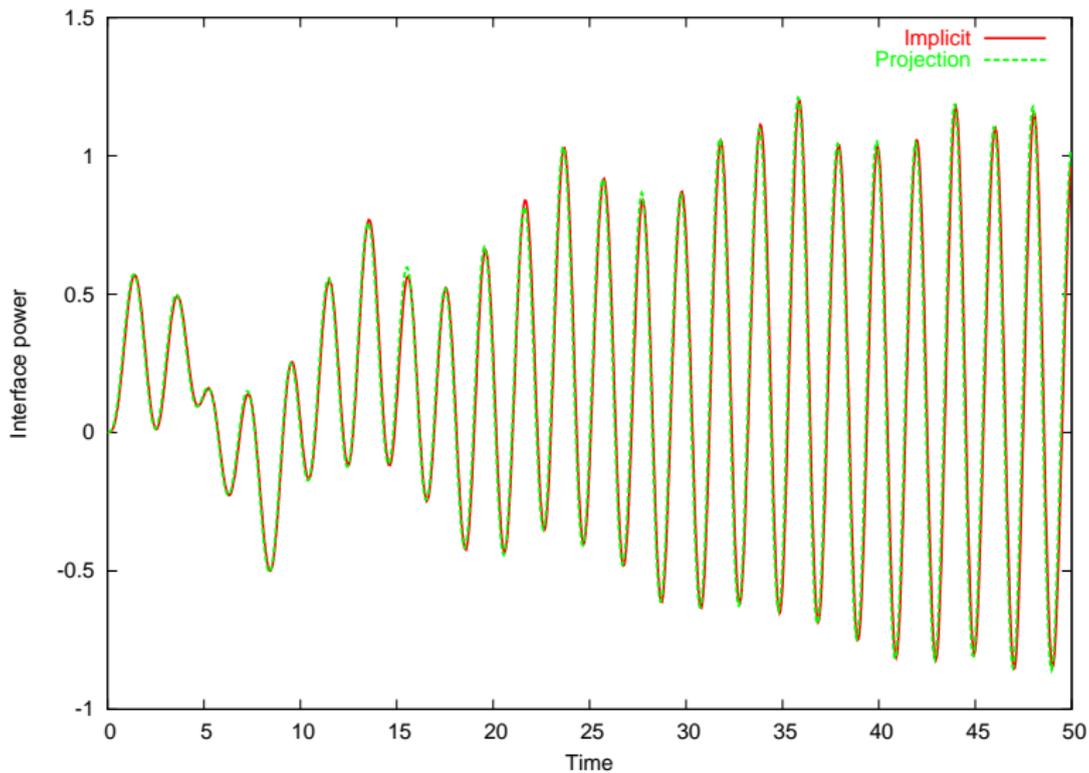
Puissance parasite à l'interface, $e_s \rho_s = 30$

Bilan d'énergie



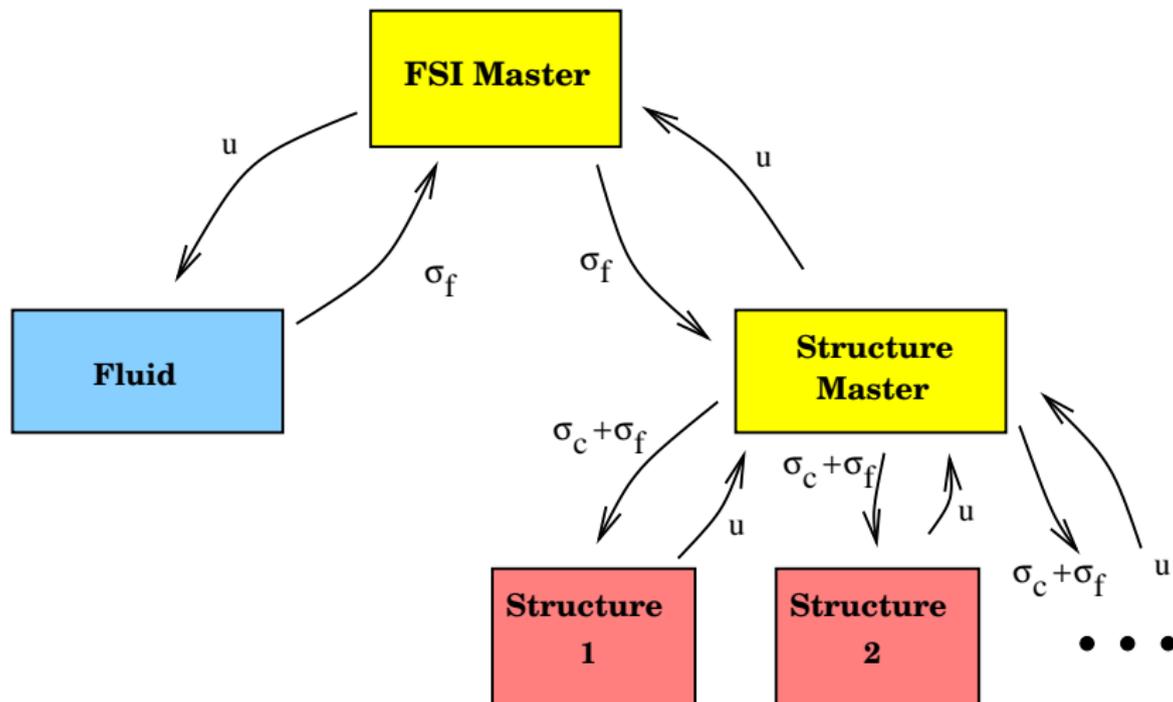
Puissance parasite à l'interface, $e_s \rho_s = 20$

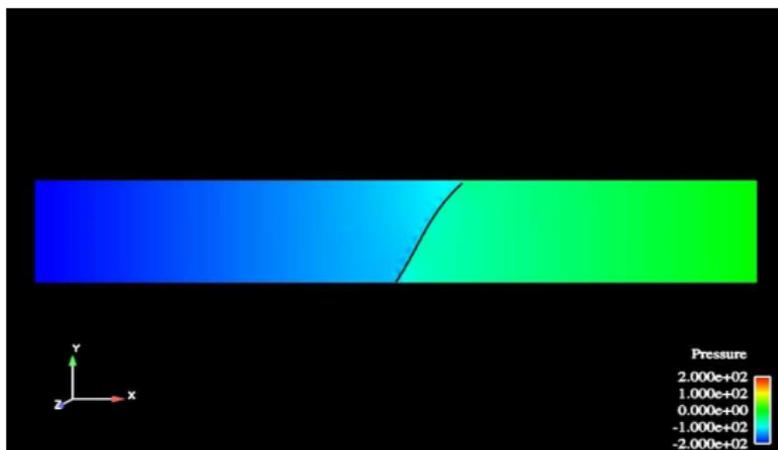
Bilan d'énergie



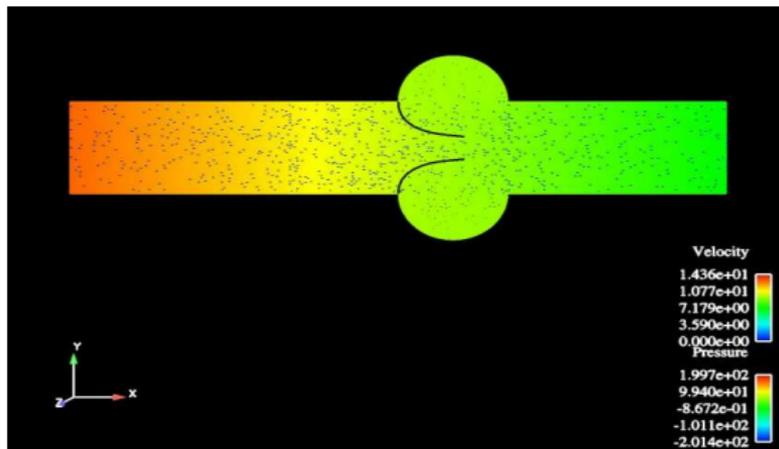
Puissance à l'interface, $e_s \rho_s = 20$

Structure immergée et contact (“sur un mur”)





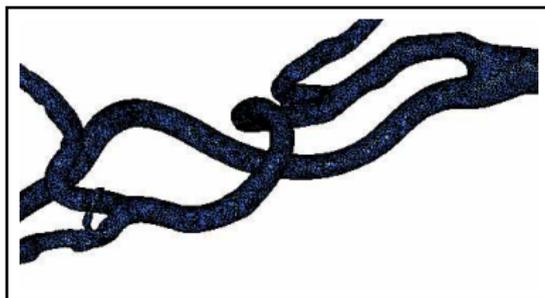
Une valve avec contact



Deux valves, avec contact **sur un mur**

Une “grande” carotide

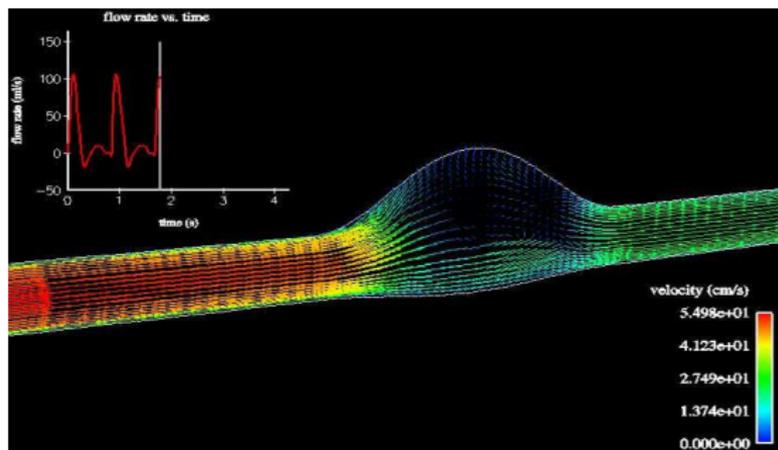
- géométrie réelle
- “impulse” de pression
- décomposition de domaine sur la structure



Anévrisme aortique

5 cycles cardiaque, 2500 pas de temps $\delta t = 1.68 \times 10^{-3}$ s.

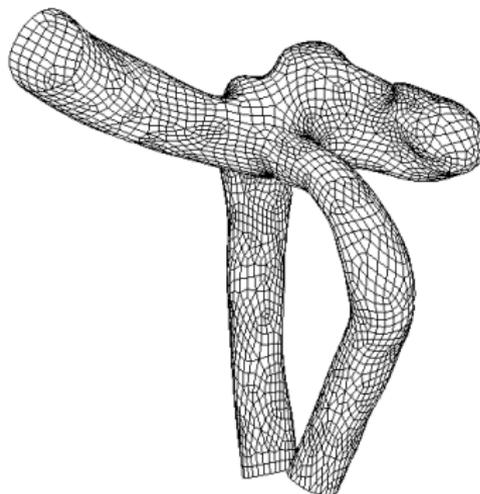
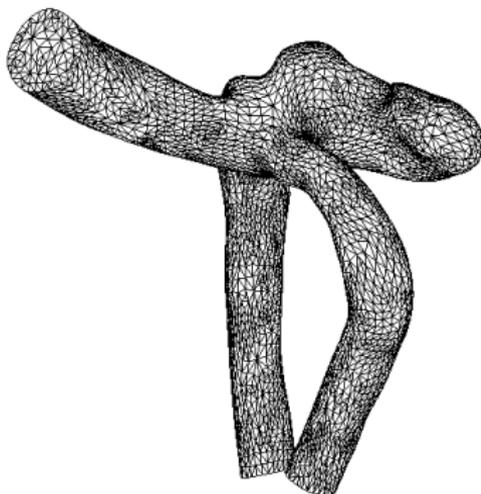
COUPLAGE	CPU	CPU (normalisé)
Implicite	14.3 jours	9.33
Semi-Implicite	37 h	1



Anévrisme Abdominal Aortique (3D). Données physiologiques.

Anévrisme cérébral

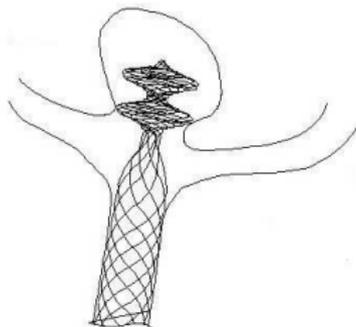
COUPLAGE	CPU FLUID (normalisé)
Implicite	4.70
Semi-Implicite	1



Anévrisme cérébral

Le stent de Cardiatis

- Fil très fin: $40 \mu m$
- Eventuellement plusieurs couches
- Taille d'une fenêtre: $100 \mu m$



Le stent de Cardiatis

- Fil très fin: $40 \mu m$
- Eventuellement plusieurs couches
- Taille d'une fenêtre: $100 \mu m$

Maillage

On renonce à mailler le stent

- coût de calcul, conditionnement
- inconsistant avec la modélisation du fluide

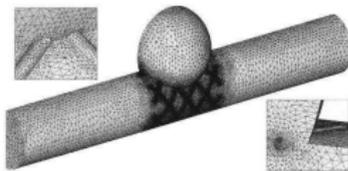
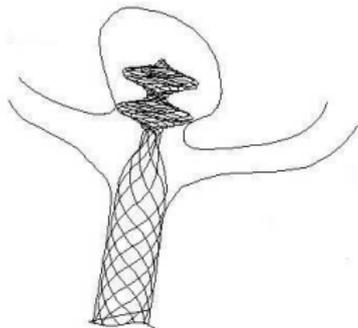


Fig. 3. Surface triangulation from the exact finely resolved element mesh (with $\Delta = 65 \mu m$, $2.0 \mu m \times 6.30$). Faces of quadratic elements are subdivided into linear triangles, and close-ups of two representative details are shown.

384 / Vol. 126, JUNE 2004

Transactions of the ASME

Le stent de Cardiatis

- Fil très fin: $40 \mu m$
- Eventuellement plusieurs couches
- Taille d'une fenêtre: $100 \mu m$

Maillage

On renonce à mailler le stent

- coût de calcul, conditionnement
- inconsistant avec la modélisation du fluide

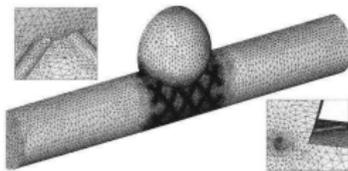
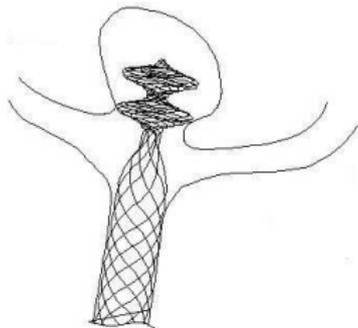


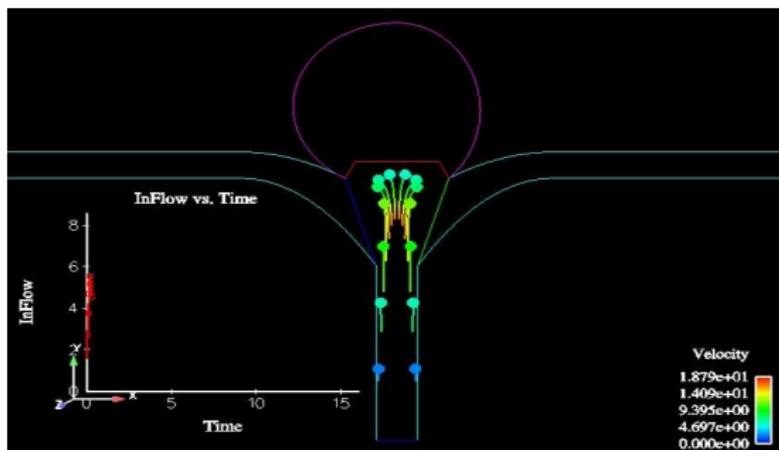
Fig. 3. Surface triangulation from the most finely resolved element mesh (with $h=65 \mu m$, $2.0 \times 10^{-6} S$). Faces of quadratic elements are subdivided into linear triangles, and close-ups of two representative details are shown.

384 / Vol. 126, JUNE 2004

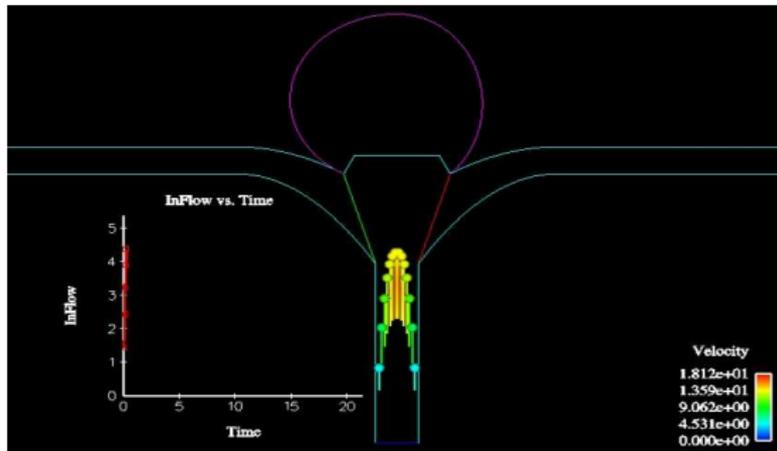
Transactions of the ASME

Modèle "homogénéisé"

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} + \int_{\Sigma} R_{\Sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

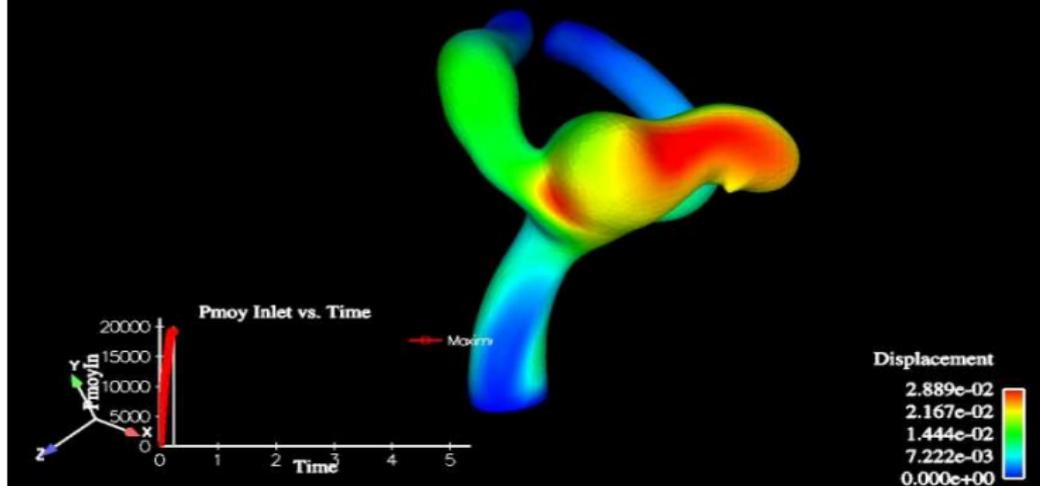


Anévrisme sans stent

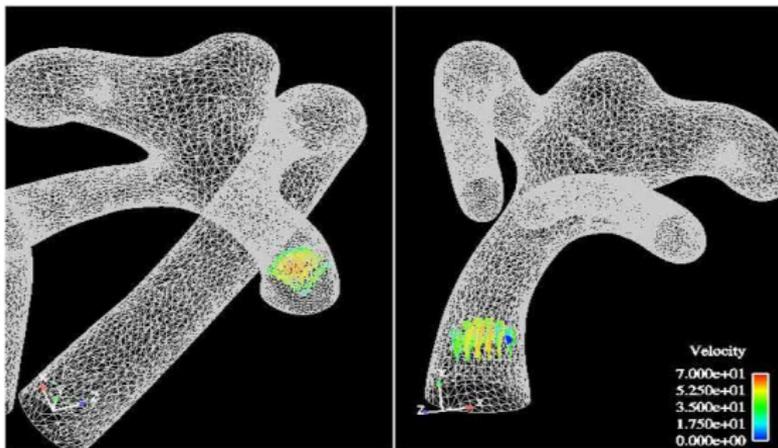


Anévrisme avec stent

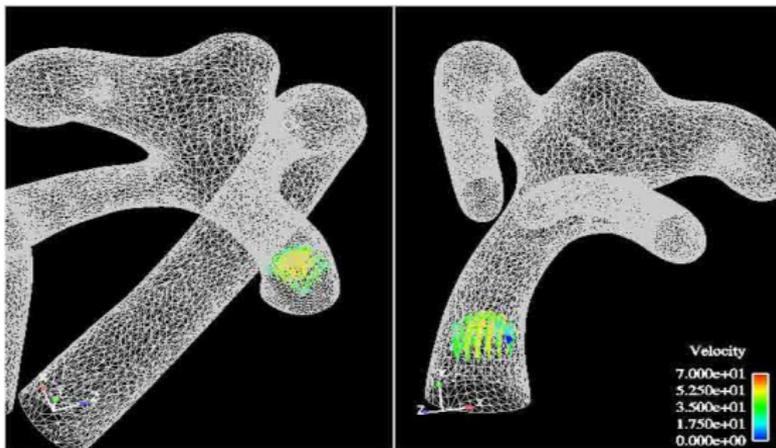
Time = 0.2400



Anévrisme cérébral.



Anévrisme sans stent



Anévrisme avec stent

r_{an}	$\frac{\ \mathbf{u}\ _{\Omega_{an,\infty}}}{\ \mathbf{u}\ _{\Omega_{fr,\infty}}}$	$\ \nabla \times \mathbf{u}\ _{\Omega_{an,2}}$	$\ WSS\ _{\partial\Omega_{an,2}}$
0	69.9%	61.7	11.6
50	23.4%	14.1	2.93
100	12.7%	7.3	1.61
200	6.5%	3.5	0.80

Impact de différentes perméabilités dans l'anévrisme r_{an}
WSS = "wall shear stress" dans l'anévrisme.

- P. Causin (*Univ. Milano*)
- N. Diniz dos Santos (*INRIA*)
- M.A. Fernández (*INRIA*)
- P. Frey (*Univ. Paris 6*)
- C. Grandmont (*Univ. Paris-Dauphine*)
- V. Martin (*INRIA*)
- F. Nobile (*Politec. Milano*)
- M. Vidrascu (*INRIA*)