

(Bon !) Comportement asymptotique
en temps d'algorithmes pour les
équations hyperboliques.

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u^0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \end{cases}$$

avec inégalité d'entropie

$$\partial_t |u - k| + \partial_x [\operatorname{sgn}(u - k)(f(u) - f(k))] \leq 0 \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},$$

$$\forall k \in \mathbb{R}.$$

Version discrète :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0 \quad (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}. \\ (\Delta t = \lambda \Delta x).$$

Les schémas raisonnables convergent vers l'unique
solution entropique :

$$\|\bar{u}(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C(t) \Delta x^\alpha \text{ (localement en espace)}.$$

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \|\bar{u}(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L^2} = 0$ (").

Mais $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{u}(t, \cdot) \neq u(t, \cdot)$ en général.

Ex : Schéma upwind, phénomène de diffusion
numérique.

Schéma décentré aval sous
contraintes amont (Bruno Després + F.L.)

(upwind \Rightarrow diffusion numérique
downwind \Rightarrow pas de diffusion mais pas de stabilité
limited downwind \Rightarrow pas de diffusion mais stabilité).

Dans le cas linéaire :

Conjecture Avec le schéma décentré aval
sous contraintes amont, $\exists C \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\|\bar{u}(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C \Delta x \frac{Ht}{\Delta x} \quad (\text{locallement en espace}) .$$

(On peut donc échanger $\lim_{t \rightarrow 0+}$ et $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+}$).

Théorème Si la condition initiale discrète
est constante par groupes de 3 mailles,
le schéma est exact.

Mais : . le schéma n'est pas monotone
(donc le théorème ne permet pas de montrer la conjecture) ;
. le schéma n'est pas entropique
(« choc de détente » dans le cas VNL).

question: existent-il des schémas bons en
temps infini et entropiques ?

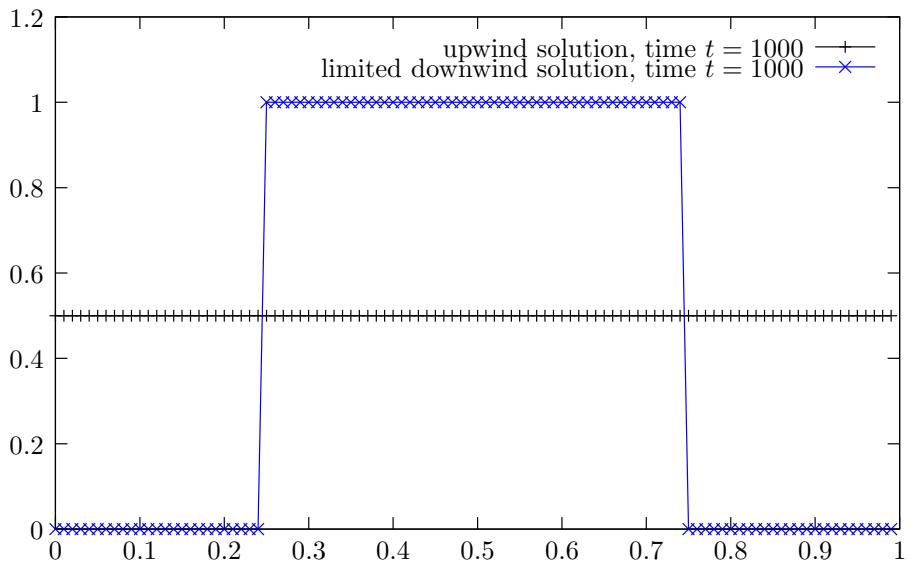


Figure 1: Solution at time $t = 1000$.

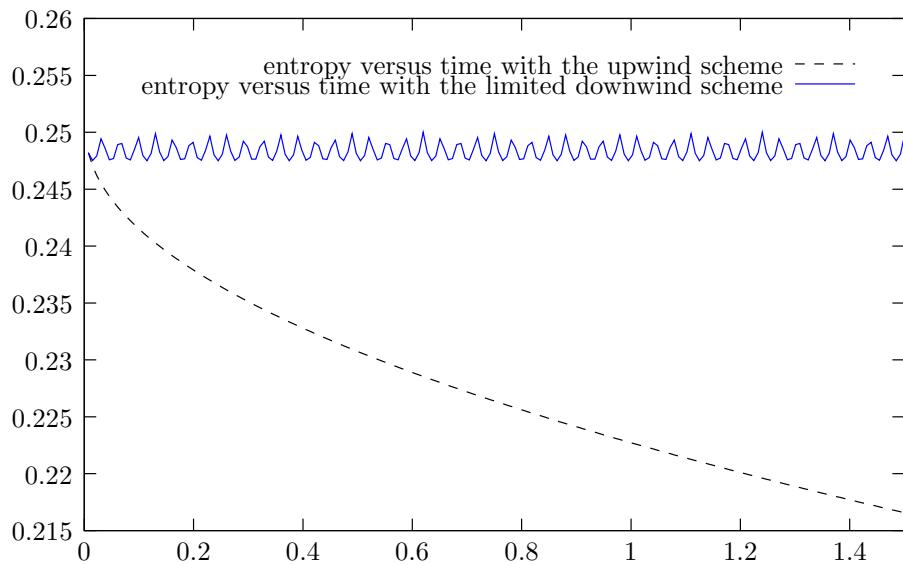


Figure 2: Evolution of the quadratic entropy.

Un résultat négatif

Théorème Soit $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}^J ($J \in \mathbb{N}^*$) définie par

$$\begin{cases} u^0 \in \mathbb{R}^J \\ u^{n+1} = F(u^n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

telle que $\sum_{j=1}^J |u_j^{n+1} - u_j^n| \leq \sum_{j=1}^J |u_j^n - u_j| \quad \forall k \in \mathbb{R}.$

Alors ① (u^n) a au moins 1 et au plus J ! valeurs d'adhérence.

② Si U et V sont deux valeurs d'adhérence, $\exists P_{U,V}$ matrice de permutation telle que

$$V = P_{U,V} U .$$

Si de plus F est continue,

③ Si U est une valeur d'adhérence, il existe une matrice de permutation P_U telle que $F(U) = P_U U .$

④ Si N est le nombre de valeurs d'adhérence distinctes, $F^N(U) = U$ pour toute valeur d'adhérence $U .$

Consequence Si l'on suppose que $F(U)$ n'est jamais une permutation de U sauf si $U = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \vdots \\ \bar{u} \end{pmatrix} , \quad U \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \vdots \\ \bar{u} \end{pmatrix} .$

C'est un résultat négatif concernant le comportement asymptotique en temps des schémas globalement entropiques sur le tore $T^1 .$

Importance des hypothèses pour ce résultat négatif

- Condition d'entropie : nécessaire
(cf. décentré aval sous contraintes amont)
- $F(u^n)$ n'est pas une permutation de u^n sauf si u^n est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$: nécessaire. En effet, le schéma upwind à nombre de Courant 1 est exact pour le transport : $F(u^n)$ est la translation d'un indice de u^n .
- Hypothèse de base : $u^{n+1} = F(u^n)$: nécessaire

Indice : schémas de reconstruction discontinue ou schémas à antidiiffusion adaptative (François Bouchut) :

ces schémas sont entropiques * et bons en temps infini. Se mettent sous la forme $\begin{cases} u^{n+1} = F(u^n, S^n) \\ S^{n+1} = G(u^n, S^n) \end{cases}$ où S est une entropie « mixte ».

* mais entropiques pour la seconde entropie S ...

Nouvelle approximation

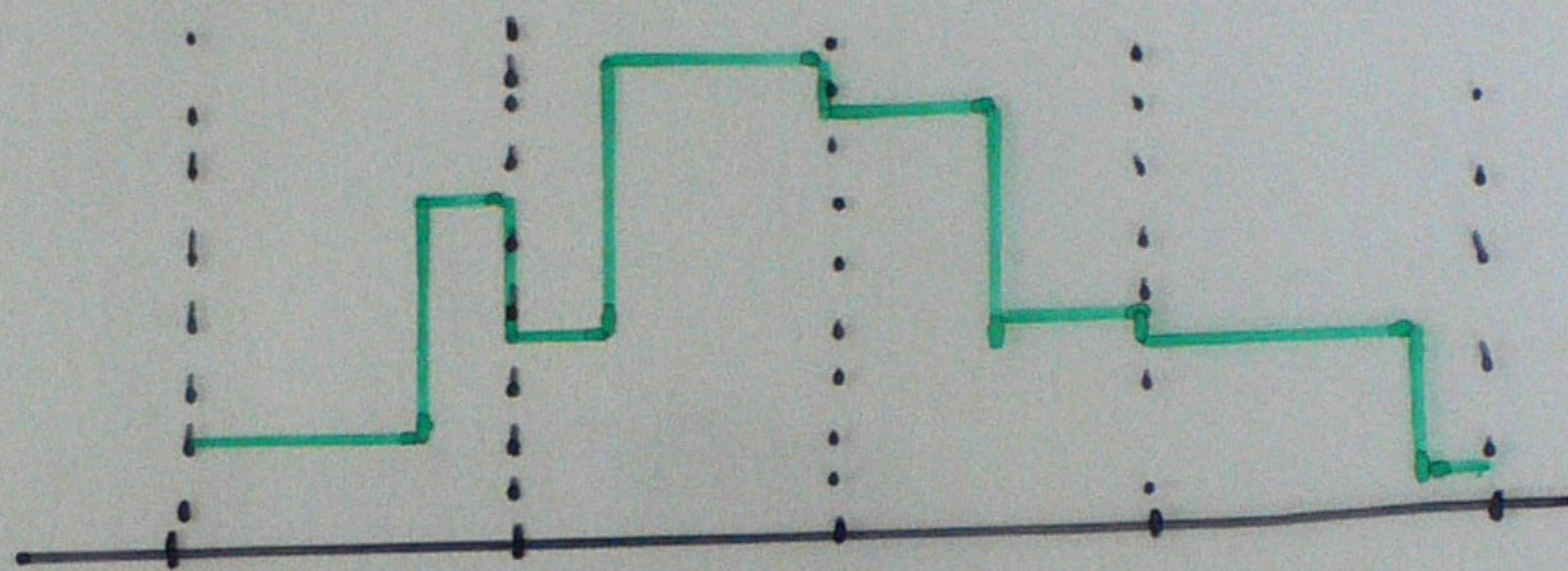
Cadre différent de $u^{n+1} = F(u^n)$

vers solution non constante par maille ?

Choix (motivé par schémas de reconstruction discontinue) :

solution discrète au temps t^n

= fonction constante par morceaux
avec 2 morceaux par maille.



Forme générale du Schéma :

u^n fonction constante par morceaux
avec 2 morceaux par maille

→ $u^{n+1/2}$ solution exacte du problème
avec u^n comme donnée initiale
($\approx t = \Delta t$).

→ u^{n+1} fonction constante par morceaux
avec 2 morceaux par maille

La seconde étape, "projection" sur l'ensemble
 V des fonctions constantes par morceaux avec
2 morceaux par maille, est l'étape-clé.

(Il ne s'agit pas d'un schéma de reconstruction).

Projection entropique sur V (1)

Théorème (Hardy, Littlewood, Polya)

$u, v \in L^1(0,1)$. Alors :

$$\int_0^1 |v - u| \leq \int_0^1 |u - u_k| \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \int_0^x v^\uparrow \geq \int_0^x u^\uparrow \quad \forall x \in [0,1] \\ \text{et} \quad \int_0^1 v = \int_0^1 u \end{array} \right. \end{array}$$

où u^\uparrow désigne le réarrangement croissant de u :

$$u^\uparrow(x) = \sup \{ y \in \mathbb{R} / \text{mes}(u \leq y) \leq x \}$$

(Équivalence similaire impliquant le réarrangement décroissant)

Intérêt : $\begin{pmatrix} u \sim u^{n+1} & \text{dans une maille donnée.} \\ v \sim v^n & - - - - - \end{pmatrix}$

- v est constituée de 2 constantes séparées par 1 discontinuité, donc v est croissante ou décroissante, donc $v = v^\uparrow$ ou $v = v^\downarrow$
- Calculer le réarrangement de u est aisé (fonction constante par morceaux) !

Procédure:

① On choisit la monotonie de v .

Ex : v décroissante.

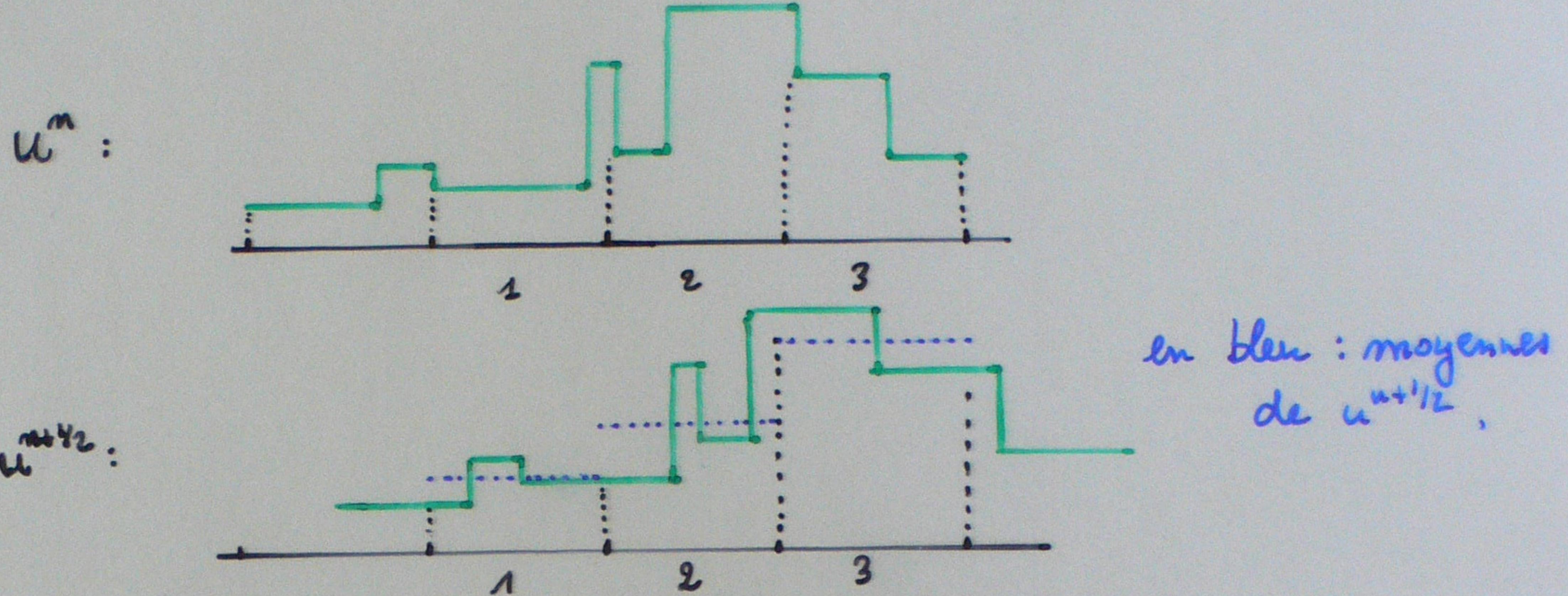
② On calcule le réarrangement... décroissant de u .

③ On trouve un $v \in V$ t.q.

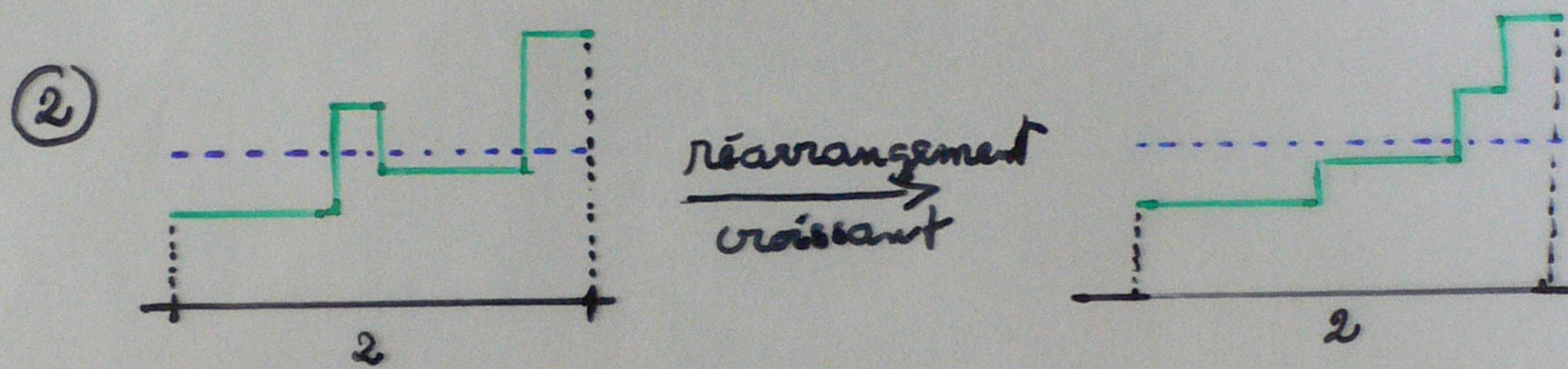
$$\int_0^2 v \leq \int_0^x u^\downarrow \quad \forall x$$

$$\text{et} \quad \int_0^1 v = \int_0^1 u.$$

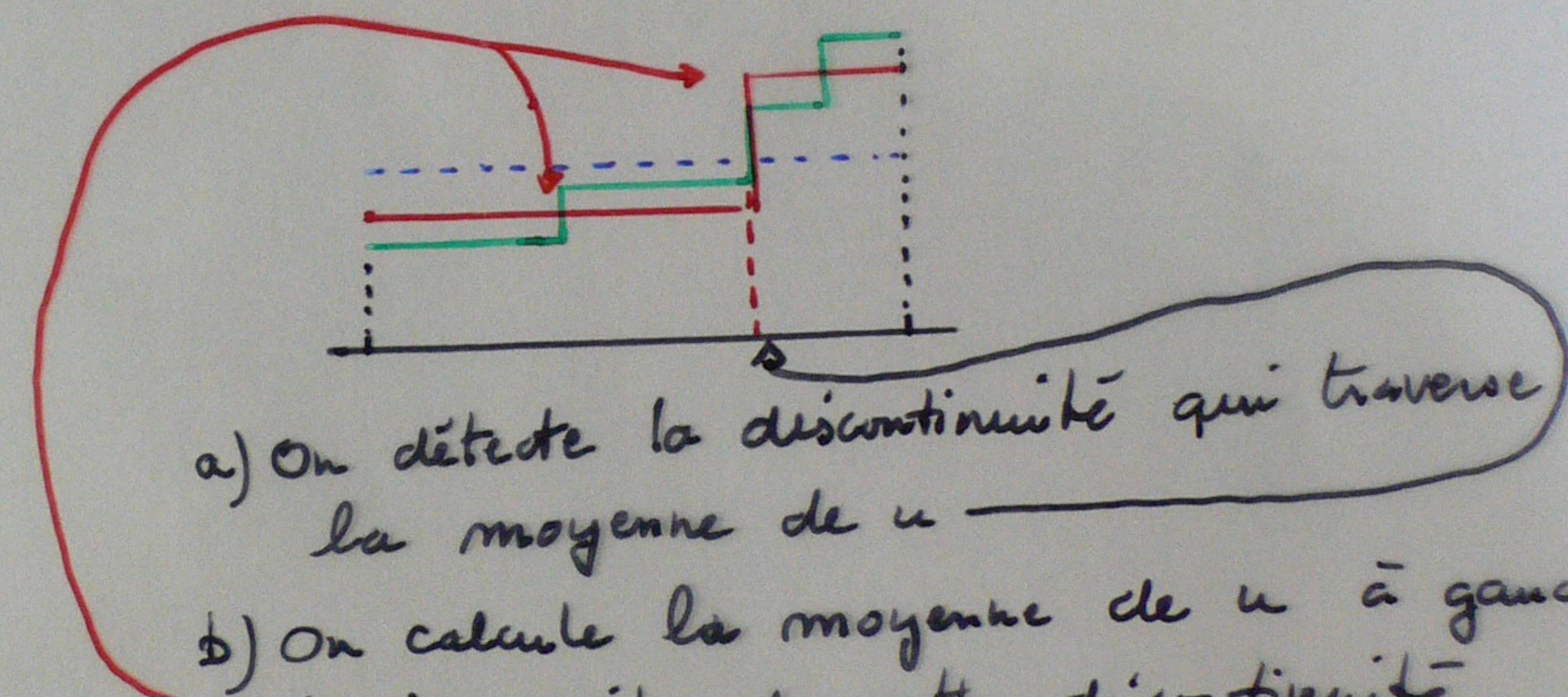
Projection sur V (2) .



- ① moyenne de $u^{m+1/2}$ localement croissante (autour de la maille 2).
 => on décide de construire u^{m+1} CROISSANTE dans la maille 2.



- ③ Construction de u^{m+1} .

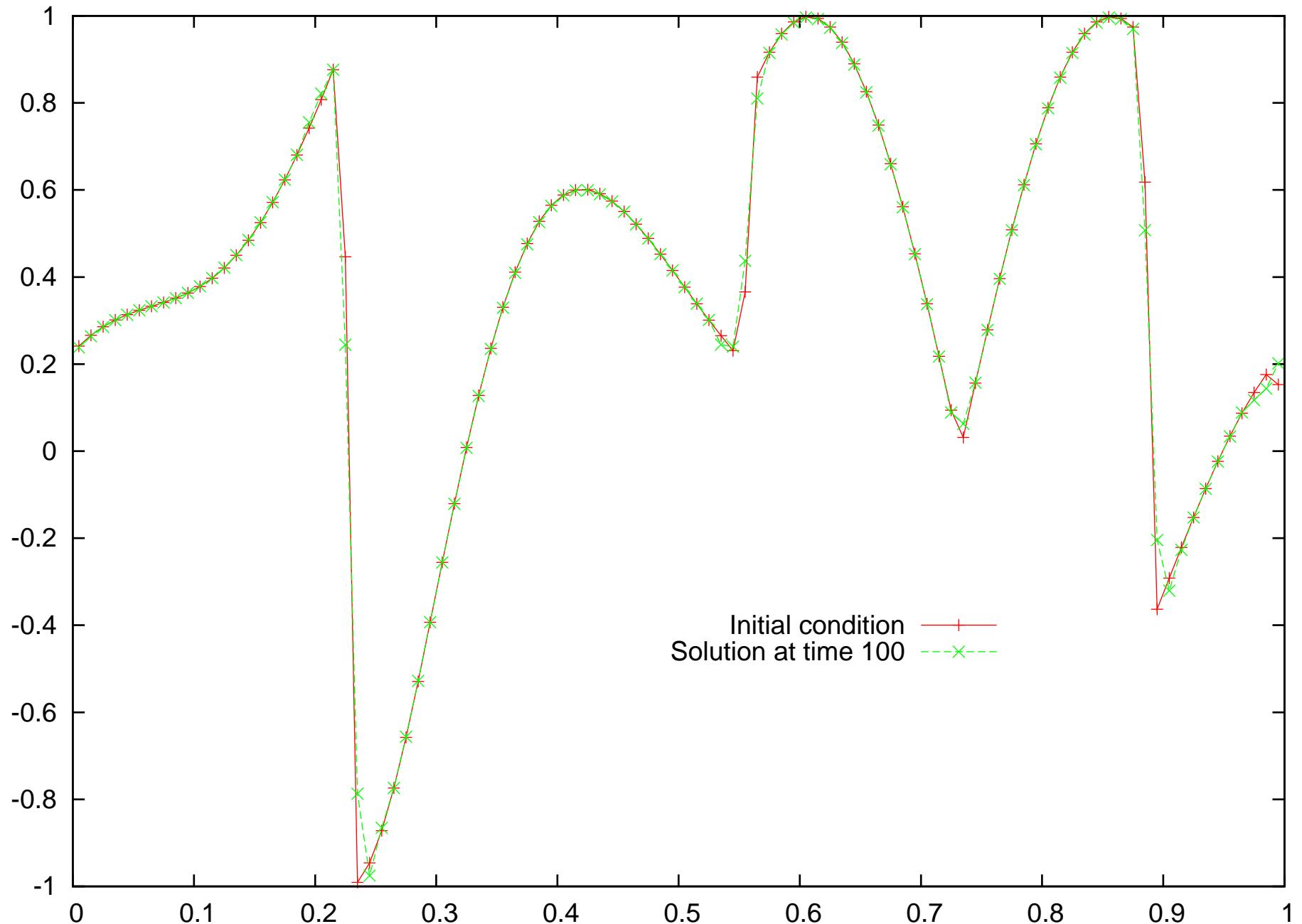


La nouvelle fonction vérifie

$$\int_0^x u^{m+1} \geq \int_0^x u^{m+1/2} \quad \forall x$$

$$\int_0^x u^{m+1} = \int_0^1 u^{m+1/2}$$

OK!



Résultat partiel

Si la donnée initiale discrète
est monotone (en moyenne par mailles),

$\exists C \text{ t.q.}$

$$\left\| \bar{u}(t, \cdot) - u(t, \cdot) \right\|_{L^2} \leq C \Delta x \quad \forall t.$$

(locallement en espace)

C ne dépend pas du temps. On
peut échanger $\lim_{t \rightarrow \infty}$ et $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$.

Démonstration La projection sur $\{\sigma \in V \mid \sigma \text{ est croissante}\}$
est contractante.

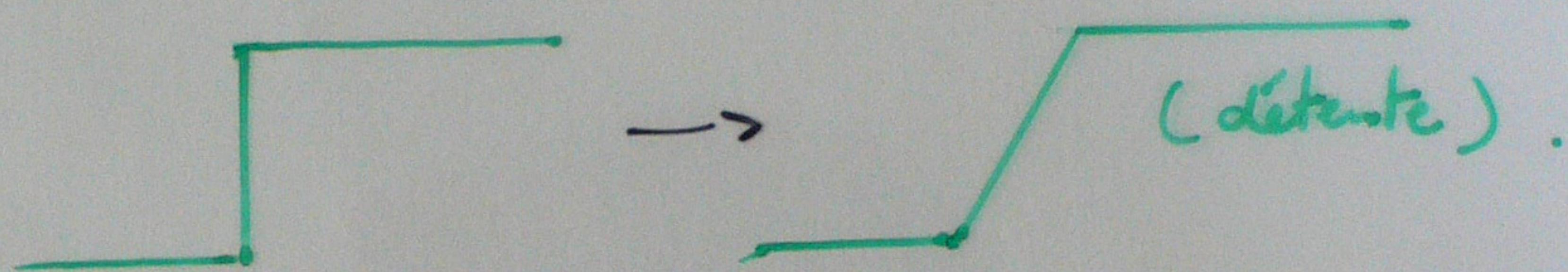
Problème lorsque la fonction projetée est
croissante ou décroissante selon la maille
considérée ...

Équations scalaires
non linéaires ?

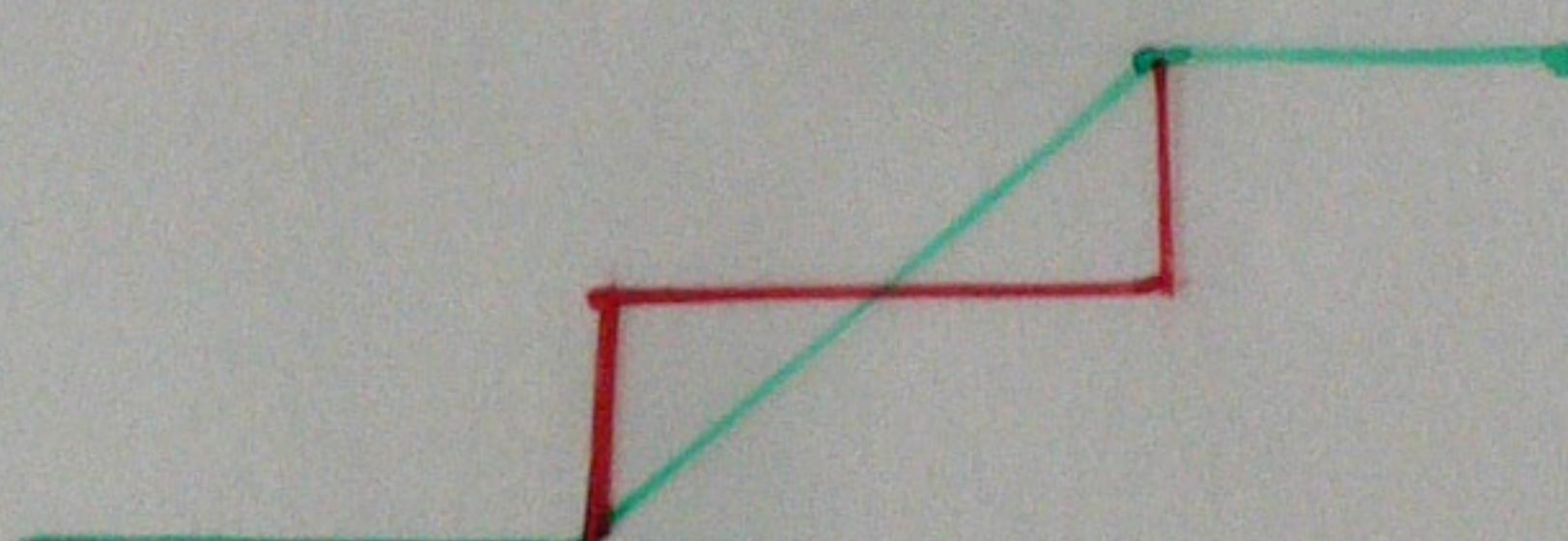
Arghh : les solutions de problèmes
de Riemann ne sont pas
constantes par morceaux

=> le calcul du réarrangement est difficile !

Ex: $f(u) = \frac{u^2}{2}$.



Idee: remplacer les détentes par des discontinuités...
De manière entropique.



et hop !

