

# Modélisation numérique d'écoulements en milieu poreux fracturés

Philippe ANGOT, Franck BOYER et Florence HUBERT

L.A.T.P. - Marseille

Canum 2006

# PLAN

- 1 INTRODUCTION
- 2 LE MODÈLE ASYMPTOTIQUE LE LONG DE LA FRACTURE
- 3 LES SCHÉMAS VOLUMES FINIS
- 4 RÉSULTATS NUMÉRIQUES
- 5 PERSPECTIVES

# 1 INTRODUCTION

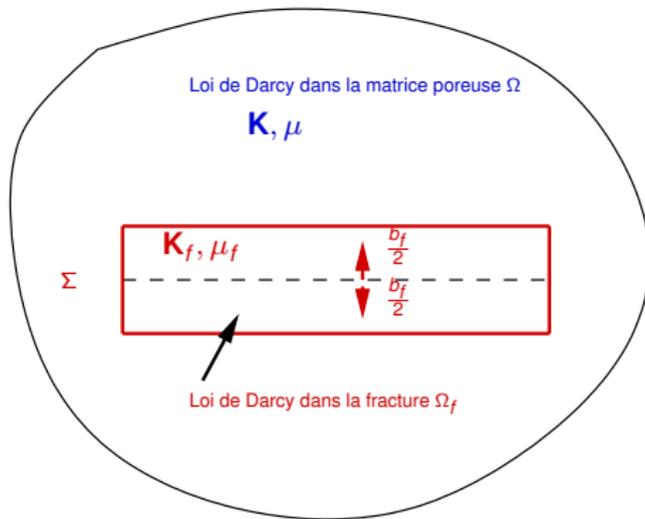
2 Le modèle asymptotique le long de la fracture

3 Les schémas volumes finis

4 Résultats numériques

5 Perspectives

## INTRODUCTION.



*Configuration pour un modèle "double-permeabilité" avec  $b_f \ll 1$ .*

- La fracture est polygonale et totalement immergée dans la matrice poreuse.
- La matrice de perméabilité dans la fracture est anisotrope :

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{f,\tau} & \mathbf{K}_{f,d} \\ \mathbf{K}_{f,d} & \mathbf{K}_{f,n} \end{bmatrix}.$$

# OBJECTIFS.

- Résolution par des schémas VF du problème de Darcy global sur  $\Omega \cup \Omega_f$  sur des maillages raffinés.
- Résolution par des schémas VF d'un problème asymptotique sur  $\Omega \cup \Sigma$ .
- ▶ Etude de la convergence des deux schémas.
- ▶ Validation “numérique” du modèle asymptotique.
  - ▶ Influence de la variation de l'épaisseur de la fracture.
  - ▶ Comportement en limite de validité du modèle asymptotique.

1 Introduction

**2 LE MODÈLE ASYMPTOTIQUE LE LONG DE LA FRACTURE**

3 Les schémas volumes finis

4 Résultats numériques

5 Perspectives

## CAS D'UNE FRACTURE RECTILIGNE.

Modèle de Darcy dans la matrice poreuse :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= h && \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} &= -\frac{1}{\mu} \mathbf{K} \cdot (\nabla p - \rho \mathbf{g}) && \text{dans } \Omega \\ p &= P_D && \text{sur } \Gamma_D \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= \kappa(p - P_\infty) + V && \text{sur } \Gamma_N \end{aligned}$$

## CAS D'UNE FRACTURE RECTILIGNE.

Notations

- La fracture :  $\Omega_f = \Sigma \times [-\frac{b_f}{2}, \frac{b_f}{2}]$  avec  $b_f \ll 1$ .
- Les coordonnées curvilignes sur  $\Sigma$  :  $(\tau, \mathbf{n})$ .
- Pour  $\psi$  dans  $H^1(\Omega)$ ,  $\psi^+$ ,  $\psi^-$  sont les traces de  $\psi$  de part et d'autre de  $\Sigma$  (orientée par  $\mathbf{n}$ ).
- $\bar{\psi}|_{\Sigma} = (\psi^+ + \psi^-)/2$  et  $[[\psi]]_{\Sigma} = (\psi^+ - \psi^-)$  sur  $\Sigma$
- $\nabla_{\tau}, \nabla_{\tau} \cdot$  : le gradient tangentiel et la divergence le long de  $\Sigma$ .

Les quantités moyennées le long de  $\Sigma$ 

$$\mathbf{u}_{f,\tau} = \frac{1}{b_f} \int_{-\frac{b_f}{2}}^{\frac{b_f}{2}} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} dt, \quad \mathbf{u}_{f,n} = \frac{1}{b_f} \int_{-\frac{b_f}{2}}^{\frac{b_f}{2}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dt$$

$$p_f = \frac{1}{b_f} \int_{-\frac{b_f}{2}}^{\frac{b_f}{2}} p dt, \quad h_f = \frac{1}{b_f} \int_{-\frac{b_f}{2}}^{\frac{b_f}{2}} h dt.$$

## LE CAS D'UNE PERMÉABILITÉ DIAGONALE

$$b_f \nabla_\tau \cdot \overline{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}}|_\Sigma = b_f h_f - \llbracket \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_\Sigma \quad \text{on } \Sigma$$

$$\overline{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}}|_\Sigma = -\frac{\mathbf{K}_{f,\tau}}{\mu_f} (\nabla_\tau p_f - \rho_f \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad \text{on } \Sigma$$

$$\overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}|_\Sigma = -\frac{\mathbf{K}_{f,n}}{\mu_f} \left( \frac{\llbracket \rho \rrbracket_\Sigma}{b_f} - \rho_f \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \right) \quad \text{on } \Sigma$$

$$p_f = \bar{p}|_\Sigma + (2\xi - 1) \left( \frac{b_f \mu_f}{4\mathbf{K}_{f,n}} \llbracket \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_\Sigma \right), \quad \xi \geq \frac{1}{2} \quad \text{on } \Sigma.$$

- **Fractures non immergées**

- Jaffré & al. (02),(05) Cas  $\xi > \frac{1}{2}$ , typiquement  $\xi = \frac{3}{4}$  ou 1.
- Faille & al (02) Cas  $\xi = \frac{3}{4}$ .

- **Fractures totalement immergées**

- Angot (03) Cas d'un gradient de pression constant,  $\xi = \frac{1}{2}$ .
- Angot (98) or Angot & al (99) Cas de fractures imperméables avec  $\llbracket \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_\Sigma = 0$ ,  $\xi = \frac{1}{2}$ .
- Bogdanov & al (03) Cas  $\xi = \frac{3}{4}$ .

# DÉRIVATION DU MODÈLE

- ▶ On intègre la loi de darcy le long des sections transversales de la fracture.
- ▶ On utilise des quadratures pour approcher les quantités moyennes.
  - **Cas  $\xi = 1/2$ .** On utilise la méthode des trapèzes

$$p_f \simeq \bar{p}|_{\Sigma}, \quad \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}|_{\Sigma} = -\frac{1}{\mu_f} \mathbf{K}_f (\nabla_{\Sigma} p_f - \rho_f \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}$$

- **Cas  $\xi = 3/4$ .** On utilise la méthode des trapèzes sur chaque moitié de fractures

$$p_f \simeq p(0), \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}(0) \simeq \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}|_{\Sigma}$$

↓

$$p_f = \bar{p}|_{\Sigma} + \frac{1}{2} \left( \frac{b_f \mu_f}{4 \mathbf{K}_{f,n}} \llbracket \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma} \right), \quad \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}|_{\Sigma} = -\frac{1}{\mu_f} \mathbf{K}_f (\nabla_{\Sigma} p_f - \rho_f \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}$$

## CAS GÉNÉRAL

$$\nabla_{\tau} \cdot (b_f(s) \overline{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}}|_{\Sigma}) = b_f(s) h_f - \llbracket \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma}$$

$$\left[ \begin{array}{c} \overline{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}}|_{\Sigma} \\ \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}|_{\Sigma} \end{array} \right] = -\frac{1}{\mu_f} \mathbf{K}_f \cdot (\nabla_{\Sigma} p_f - \rho_f \mathbf{g})$$

$$p_f = \bar{p}|_{\Sigma} + (2\xi - 1) \left( \frac{b_f \mu_f}{4\mathbf{K}_{f,n}} \llbracket \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma} + C \frac{b_f \mathbf{K}_{f,d}}{\mathbf{K}_{f,n}} \nabla_{\tau} \llbracket p \rrbracket_{\Sigma} \right)$$

avec 
$$\nabla_{\Sigma} p_f = \left[ \begin{array}{c} \nabla_{\tau} p_f \\ \frac{\llbracket p \rrbracket_{\Sigma}}{b_f} \end{array} \right], \quad \xi \geq \frac{1}{2}.$$

Conditions aux limite de Neumann homogène sur  $\partial\Sigma$  :  $\overline{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}}|_{\Sigma} = 0$ .

Remarque : Le modèle asymptotique est bien posé pour  $\xi = \frac{1}{2}$  pour toute  $\mathbf{K}_f$  et pour  $\xi > \frac{1}{2}$  si  $\mathbf{K}_{f,d} = 0$ .

- 1 Introduction
- 2 Le modèle asymptotique le long de la fracture
- 3 LES SCHÉMAS VOLUMES FINIS**
- 4 Résultats numériques
- 5 Perspectives

# LE MODÈLE DARCY-DARCY GLOBAL

On utilise un schéma volumes finis de type **DDFV** qui permet de gérer

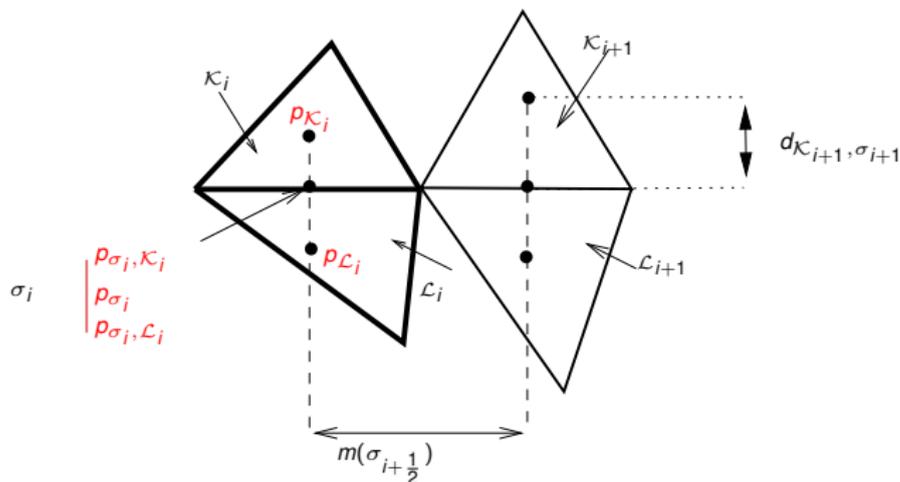
- ▶ l'anisotropie de la perméabilité.
- ▶ les fortes discontinuités de la perméabilité.

⇒ Le schéma converge et on a des estimations d'erreur en  $O(h)$

Voir **Boyer-Hubert (06)**.

## LE MODÈLE ASYMPTOTIQUE

On utilise les notations et les hypothèses classiques pour les schémas volumes finis cells-centered sur maillage admissible. Voir EGH (00).



Maillage  $\mathcal{T}$  conforme à l'interface  $\Sigma : \sigma = \kappa | \mathcal{L} \subset \Sigma$ .

- Inconnues en pression  $p_{\kappa}$  pour tout  $\kappa \in \mathcal{T}$
- Inconnues auxiliaires  $(p_{\sigma}, p_{\sigma, \kappa}, p_{\sigma, \mathcal{L}})$  sur  $\sigma = \kappa | \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{\Sigma}$
- Les arêtes sur  $\Sigma : \sigma_1, \dots, \sigma_N$ .

# LE SCHÉMA “ASYMPTOTIQUE” DANS LA MATRICE POREUSE $\Omega$ (I).

$$\sum_{\sigma \subset \partial \mathcal{K}} m(\sigma) F_{\mathcal{K},\sigma} = m(\mathcal{K}) h_{\mathcal{K}}, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T},$$

où pour tout  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$  :

$$F_{\mathcal{K},\sigma} = \begin{cases} \frac{\mathbf{K}}{\mu} \left( \frac{\rho_{\mathcal{K}} - \rho_{\sigma,\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K},\sigma}} + \rho_{\mathcal{K}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}|\mathcal{L}} \right) & \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}, \\ 0 & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext}^N, \\ \frac{\mathbf{K}}{\mu} \left( \frac{\rho_{\mathcal{K}} - P_{D,\sigma}}{d_{\mathcal{K},\sigma}} + \rho_{\mathcal{K}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}|\mathcal{L}} \right) & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext}^D. \end{cases}$$

# LE SCHÉMA “ASYMPTOTIQUE” DANS LA MATRICE POREUSE $\Omega$ (II).

Les inconnues auxilliaires d'interface  $p_{\sigma,\kappa}, p_{\sigma,\mathcal{L}}$  sont classiquement éliminées en dehors de  $\Sigma$  :

$$F_{\kappa,\sigma} = -F_{\mathcal{L},\sigma}, \quad \text{et} \quad p_{\sigma,\kappa} = p_{\sigma,\mathcal{L}}, \quad \text{si } \sigma = \kappa|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}.$$

$$\Downarrow$$

$$F_{\kappa,\sigma} = \frac{\mathbf{K}}{\mu} \left( \frac{p_{\kappa} - p_{\mathcal{L}}}{d_{\kappa\mathcal{L}}} + \left( \frac{d_{\kappa,\sigma}}{d_{\kappa\mathcal{L}}} \rho_{\kappa} + \frac{d_{\mathcal{L},\sigma}}{d_{\kappa\mathcal{L}}} \rho_{\mathcal{L}} \right) \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_{\kappa|\mathcal{L}} \right)$$

LE SCHÉMA L'ASYMPTOTIQUE" LONG DE  $\Sigma$ 

Pour toute arête  $\sigma_i = \mathcal{K}|_{\mathcal{L}} \subset \Sigma$

$$-\nabla_{\tau} \cdot \left( b_f \frac{\mathbf{K}_{f,\tau}}{\mu_f} \nabla_{\tau} p_f \right) = b_f h_f - [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_{\Sigma}$$

↓

$$-\frac{\mathbf{K}_{f,\tau}}{\mu_f} \left( b_{f,i+\frac{1}{2}} \frac{p_{\sigma_{i+1}} - p_{\sigma_i}}{m_{i+\frac{1}{2}}} - b_{f,i-\frac{1}{2}} \frac{p_{\sigma_i} - p_{\sigma_{i-1}}}{m_{i-\frac{1}{2}}} \right) = m_i b_{f,i} h_{f,i} + m_i (F_{\mathcal{K},\sigma_i} + F_{\mathcal{L},\sigma_i})$$

LE SCHÉMA "ASYMPTOTIQUE" LE LONG DE  $\Sigma$ .Conditions de transmission sur  $\Sigma$ .

Pour tout  $\sigma = \kappa|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_\Sigma$  :

$$\overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}|_\Sigma = -\frac{1}{\mu_f} \mathbf{K}_{f,n} \left( \frac{[[p]]_\Sigma}{b_f} - \rho_f \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \right)$$

$$\rho_f = \bar{p}|_\Sigma + (2\xi - 1) \frac{b_f \mu_f}{4\mathbf{K}_{f,n}} [[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_\Sigma$$

⇓

- $\frac{1}{2} (F_{\kappa,\sigma} - F_{\mathcal{L},\sigma}) = \frac{\mathbf{K}_{f,n}}{\mu_f b_f} (p_{\sigma,\kappa} - p_{\sigma,\mathcal{L}}) + \frac{\mathbf{K}_{f,n}}{\mu_f} \rho_f \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_{\kappa|\mathcal{L}},$

- $p_\sigma = \frac{1}{2} (p_{\sigma,\kappa} + p_{\sigma,\mathcal{L}}) - \frac{(2\xi - 1) b_f \mu_f}{4\mathbf{K}_{f,n}} (F_{\kappa,\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma}).$

# CONVERGENCE DU SCHÉMA POUR LE MODÈLE ASYMPTOTIQUE

► Pour  $\xi = \frac{1}{2}$ , le schéma converge.

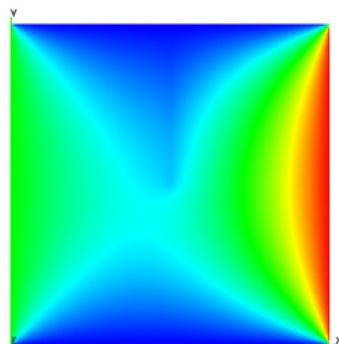
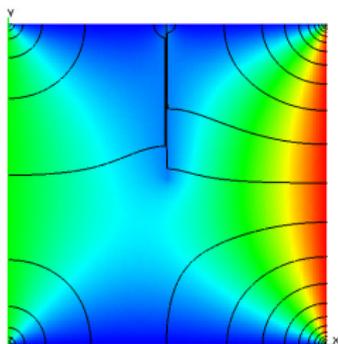
La démonstration repose sur

- Des inégalités de traces discrètes.
- Des propriétés de compacité de la famille  $p^T$ .

- 1 Introduction
- 2 Le modèle asymptotique le long de la fracture
- 3 Les schémas volumes finis
- 4 RÉSULTATS NUMÉRIQUES**
- 5 Perspectives

# COMPARAISON ENTRE LES MODÈLES ASYMPTOTIQUE ET GLOBAL.

Demi-fracture verticale à épaisseur constante :



*Fracture perméable*

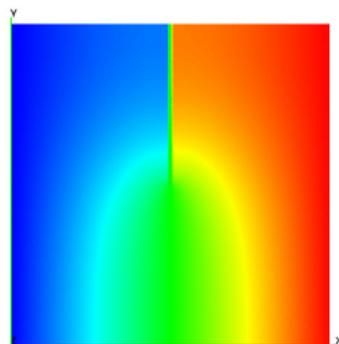
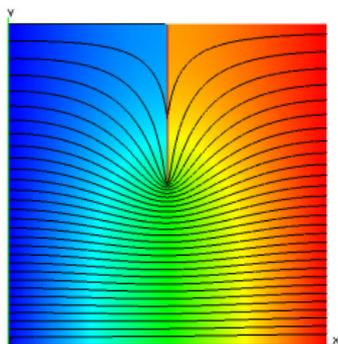
$$b_f = 0.01, \mathbf{K}_{f,\tau} = 10^6, \mathbf{K}_{f,n} = 100$$

Modèle asymptotique  
maillage rectangulaire  
16000 mailles

Modèle global  
maillage triangulaire  
100000 mailles

# COMPARAISON ENTRE LES MODÈLES ASYMPTOTIQUE ET GLOBAL.

Demi-fracture verticale à épaisseur constante :



*Fracture imperméable*

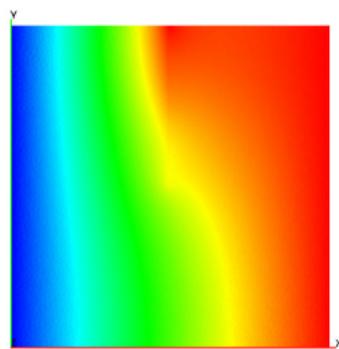
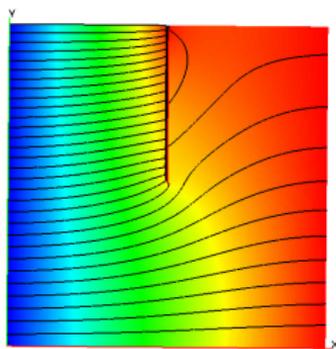
$$b_f = 0.01, \mathbf{K}_{f,\tau} = 0, \mathbf{K}_{f,n} = 10^{-7}$$

Modèle asymptotique  
maillage rectangulaire  
16000 mailles

Modèle global  
maillage triangulaire  
100000 mailles

# COMPARAISON ENTRE LES MODÈLES ASYMPTOTIQUE ET GLOBAL.

Demi-fracture verticale à épaisseur constante :



*Fracture avec des propriétés intermédiaires*

$$b_f = 0.01, \mathbf{K}_{f,\tau} = 100, \mathbf{K}_{f,n} = 100$$

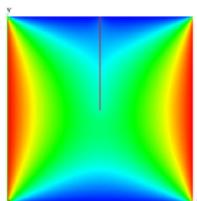
modèle asymptotique  
maillage rectangulaire  
16000 mailles

modèle global  
maillage triangulaire  
24000 mailles

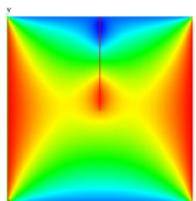
INFLUENCE DU PARAMÈTRE DE QUADRATURE  $\xi$ 

- Dans les exemples précédents : aucune différence ( $< 0.01\%$ )
- Fracture avec des propriétés intermédiaires  
 $\Rightarrow$  différence de l'ordre de 10%.

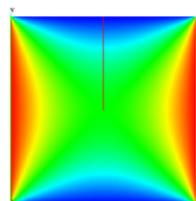
$$\mathbf{K}_{f,\tau} = 100, \mathbf{K}_{f,n} = 10^{-4}, b_f = 0.01$$



$$\xi = 0.5$$



$$\xi = 0.498$$

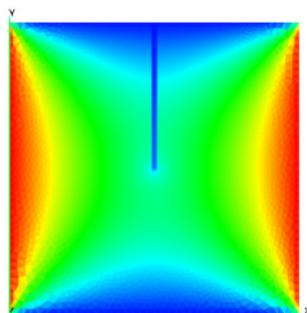
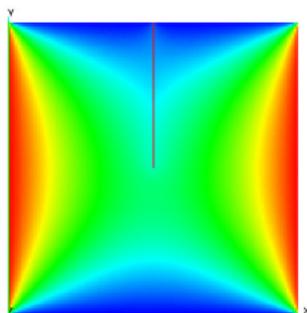


$$\xi = 0.75$$

INFLUENCE DU PARAMÈTRE  $\xi$ 

Fracture avec des propriétés intermédiaires

$$\mathbf{K}_{f,\tau} = 100, \mathbf{K}_{f,n} = 10^{-4}, b_f = 0.01$$



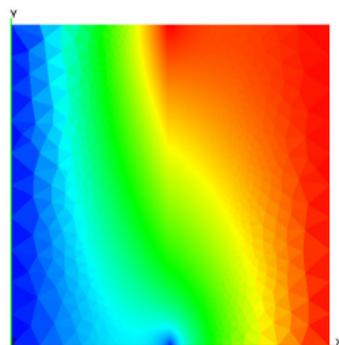
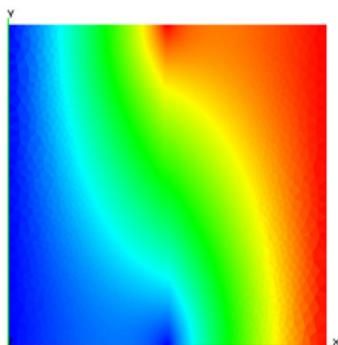
Modèle asymptotique

$$\xi = 0.5$$

Modèle global

## EPAISSEUR VARIABLE

Solution du modèle global



*Fracture avec des propriétés intermédiaires*

$b_f$  moyen = 0.01,  $\mathbf{K}_{f,\tau} = 100$ ,  $\mathbf{K}_{f,n} = 100$

Fracture droite verticale

maillage triangulaire

100000 mailles

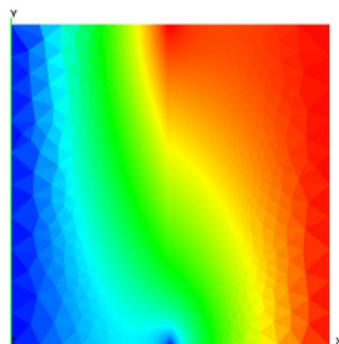
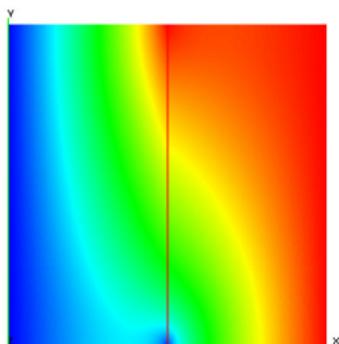
Fracture conique verticale

maillage triangulaire

100000 mailles

## EPAISSEUR VARIABLE

Fracture verticale conique :



*Fracture avec des propriétés intermédiaires*

$b_f$  moyen = 0.01,  $\mathbf{K}_{f,\tau} = 100$ ,  $\mathbf{K}_{f,n} = 100$

Modèle asymptotique

maillage rectangulaire

16000 mailles

Modèle global

maillage triangulaire

100000 mailles

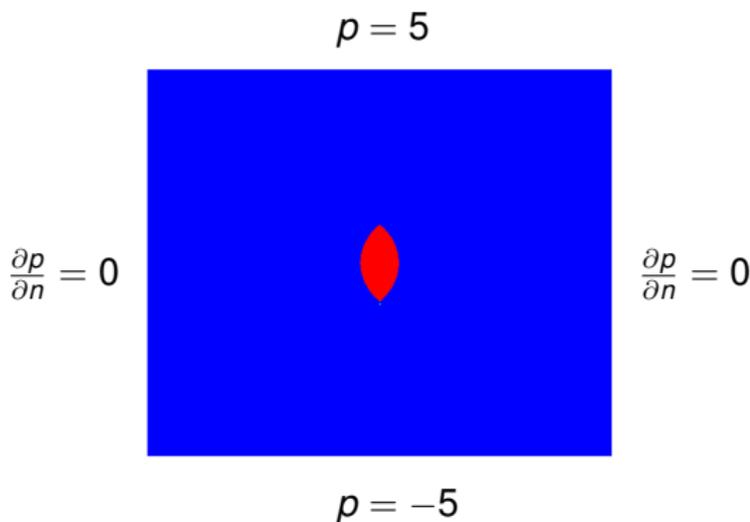
## COMPARAISON AVEC DES SOLUTIONS ANALYTIQUES

**Le cas de la lentille** Voir [Adler & al \(06\)](#).

- On est en limite de validité du modèle asymptotique

$$b_f \text{ moyen} \sim 0.06.$$

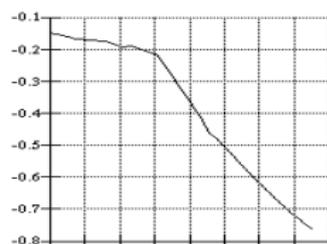
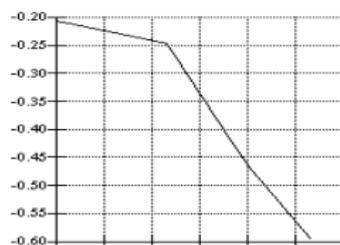
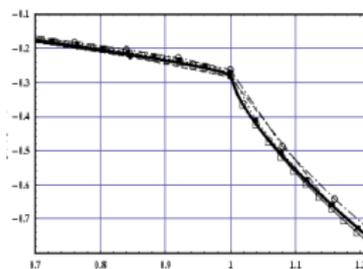
- L'épaisseur s'annule aux extrémités de la fracture ( $b_f = 0$ ).



## COMPARAISON AVEC DES SOLUTIONS ANALYTIQUES

**Le cas de la lentille** Voir **Adler & al (06)**.

*Comportement au voisinage d'un coin de la lentille*



Solution analytique | Modèle global | Modèle asymptotique

- 1 Introduction
- 2 Le modèle asymptotique le long de la fracture
- 3 Les schémas volumes finis
- 4 Résultats numériques
- 5 PERSPECTIVES**

# PERSPECTIVES...

- Couplage avec le transport solutal
- Dérivation de modèles asymptotiques pour des modèles “Stokes - Darcy”