

Remaillage local anisotrope en 3d et applications

Cécile Dobrzynski

GCE - Université Catholique de Louvain
LJLL - Université Paris VI

en collaboration avec P. Frey

CANUM 2006

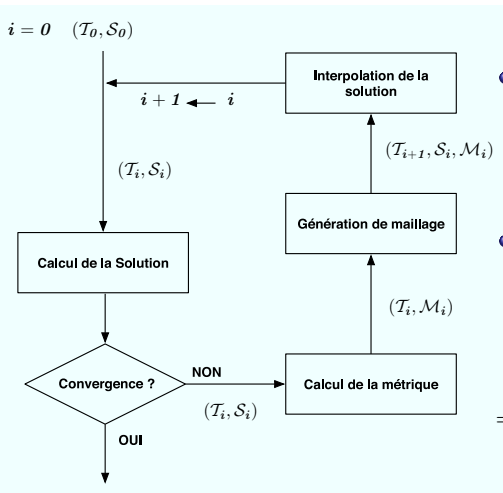
Introduction : Position du problème

- Phénomène concentré dans une petite région :
maillage uniforme $\Rightarrow$ **maillage de taille importante.**
- Anisotropie naturelle des phénomènes : ondes de chocs, couches limites...
 $\Rightarrow$ **maillages anisotropes.**

Adaptation de maillage anisotrope :

contrôler l'erreur d'approximation tout en ayant un nombre de points minimaux pour le maillage.

Adaptation de maillages



- Estimateur d'erreur de l'erreur d'interpolation :

$$\left\| \frac{u - \Pi_h u}{u} \right\|_{\infty, K} \leq c \max_{\vec{e} \in E_K} \langle \vec{e}, \frac{\mathcal{M}(K)}{u} \vec{e} \rangle,$$

- soit ε un seuil d'erreur, chaque arête e doit vérifier l'égalité :

$$\varepsilon = c \langle \vec{e}, \mathcal{M}(K) \vec{e} \rangle, \forall e \in E_K$$

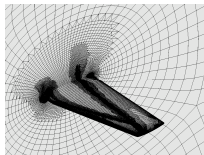
$$\Rightarrow \langle \vec{e}, |\widetilde{\mathcal{M}}(K)| \vec{e} \rangle = 1$$

$\Rightarrow$ construction d'un maillage *unité*.

Génération de maillage 3d

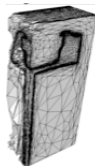
raffinement/déraffinement

[R. Biswas, Y. Kallinderis,
R. Löhner, D.J. Mavriplis,
R.D. Rausch, M.S. Shephard]



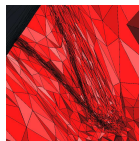
remaillage local

[T. Coupez, C.C. Pain,
X. Li, A. Tam, CD-PF]



remaillage global

- méthodes frontales
[R. Löhner, J. Peraire]
- octree modifié [M.S. Shephard]
- méthodes de Delaunay
[T. Baker, P-L. George]



Génération de maillage 3d : modifications locales

Avantages pour l'adaptation :

- ❶ maillage toujours valide,
- ❷ un seul maillage en mémoire,
- ❸ le nombre de modifications décroît à mesure que le nombre d'adaptations augmente (cas stationnaire),
- ❹ traitement des problèmes à frontières mobiles.

Algorithme d'optimisation basé sur :

- ❶ l'analyse des longueurs (insertion, suppression),
- ❷ la qualité des éléments (bascules, bougés).

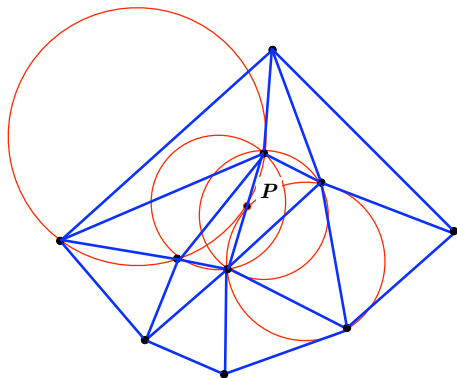
Triangulation de Delaunay :

- $\mathcal{T}$ est un maillage de Delaunay ssi

$$\forall (K, K') \in \mathcal{T}, K = \text{adj}(K') \quad \mathcal{B}(K) \cap \mathcal{V}(K') = \emptyset$$

- mesure de Delaunay et cavité :

$$\alpha(K, P) = \frac{d(P, O_K)}{r_K} \quad K \in \mathcal{C}_P \text{ ssi } \alpha(K, P) \leq 1.$$



Triangulation $\mathcal{T}_n$

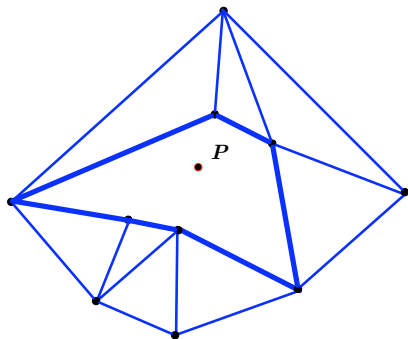
Triangulation de Delaunay :

- $\mathcal{T}$ est un maillage de Delaunay ssi

$$\forall (K, K') \in \mathcal{T}, K = \text{adj}(K') \quad \mathcal{B}(K) \cap \mathcal{V}(K') = \emptyset$$

- mesure de Delaunay et cavité :

$$\alpha(K, P) = \frac{d(P, O_K)}{r_K} \quad K \in \mathcal{C}_P \text{ ssi } \alpha(K, P) \leq 1.$$



$\mathcal{T}_n - \mathcal{C}_n$

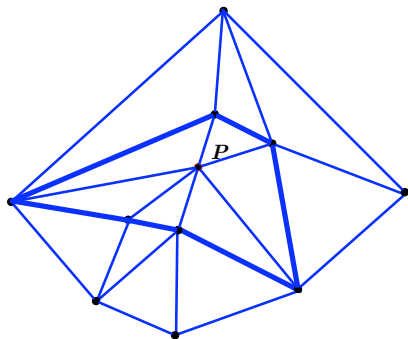
Triangulation de Delaunay :

- $\mathcal{T}$ est un maillage de Delaunay ssi

$$\forall (K, K') \in \mathcal{T}, K = \text{adj}(K') \quad \mathcal{B}(K) \cap \mathcal{V}(K') = \emptyset$$

- mesure de Delaunay et cavité :

$$\alpha(K, P) = \frac{d(P, O_K)}{r_K} \quad K \in \mathcal{C}_P \text{ ssi } \alpha(K, P) \leq 1.$$



$$\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n - \mathcal{C}_n \cup \mathcal{B}_{n+1}$$

Triangulation de Delaunay :

- $\mathcal{T}$ est un maillage de Delaunay ssi

$$\forall (K, K') \in \mathcal{T}, K = \text{adj}(K') \quad \mathcal{B}(K) \cap \mathcal{V}(K') = \emptyset$$

- mesure de Delaunay et cavité :

$$\alpha(K, P) = \frac{d(P, O_K)}{r_K} \quad K \in \mathcal{C}_P \text{ ssi } \alpha(K, P) \leq 1.$$

- extension de la cavité au cas anisotrope :

$$\alpha(K, P)_{\mathcal{M}} = \frac{\ell_{\mathcal{M}}(P, O_K)}{r_K}.$$

Noyau de Delaunay : cas anisotrope

- On utilise le même algorithme que dans le cas classique.
- Il y a plusieurs façons de définir la cavité :

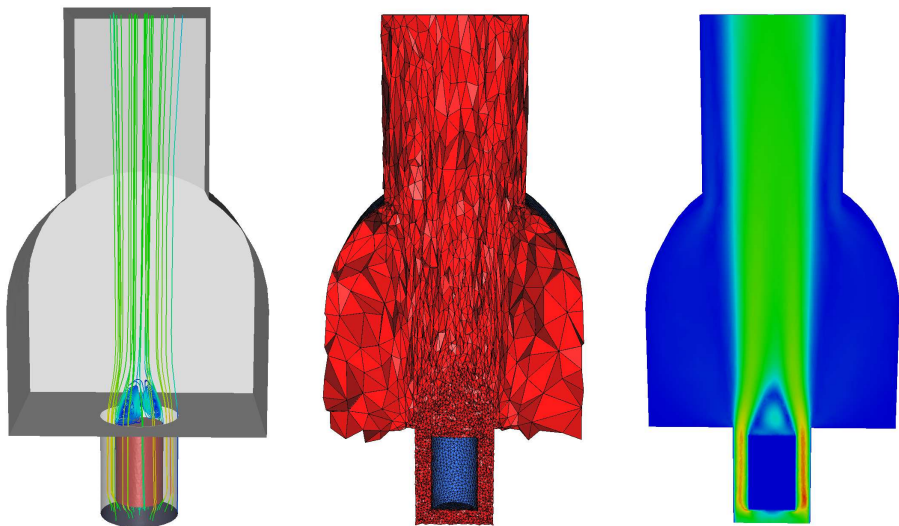
$$\textcircled{1} \quad \alpha(K, P)_{\mathcal{M}(P)} \leq 1,$$

$$\textcircled{2} \quad \alpha(K, P)_{\mathcal{M}(P)} + \sum_{i=1}^4 \alpha(K, P)_{\mathcal{M}(P_i)} \leq 5,$$

$$\textcircled{3} \quad \alpha(K, P)_{\mathcal{M}(P)} + \sum_{i=1}^4 \omega_i \alpha(K, P)_{\mathcal{M}(P_i)} \leq 1 + \sum_{i=1}^4 \omega_i.$$

- Etoilement de la cavité + connexité :
 $\Rightarrow$ procédure de correction de la cavité.

Refroidissement de déchets nucléaires



Adaptation de maillage anisotrope utilisant des modifications locales
(31e adaptation).

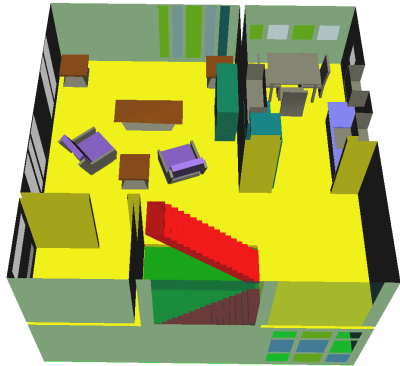
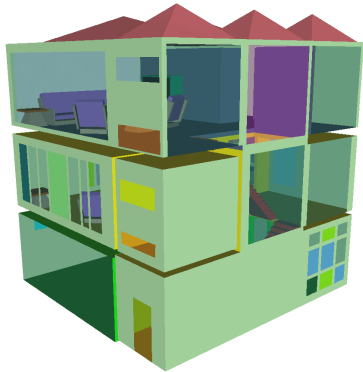
Refroidissement de déchets nucléaires : caractéristiques

mesure de qualité :

$$Q_K = \beta \frac{\left(\sum_{1 \leq i < j \leq 6} {}^t \overrightarrow{P_i P_j} \mathcal{M}_{moy} \overrightarrow{P_i P_j} \right)^3}{\sqrt{\text{Det}(\mathcal{M}_{moy})} V_K}, \quad Q_K \in [1, +\infty[$$

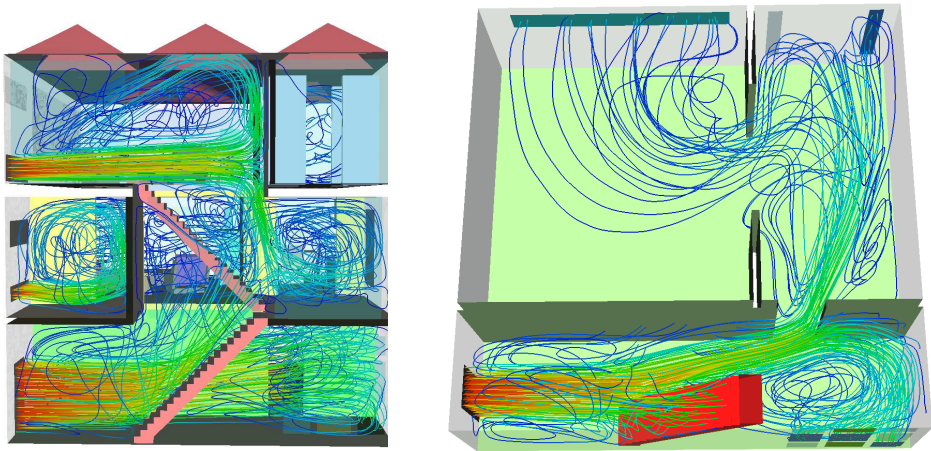
	Maillage initial	Maillage adapté
nb de points	54 183	41 566
nb de tetras	293 862	229 150
ratio aniso prescrits : max		17
ratio aniso obtenus : max		16
ind. eff.		0,8438
$0.71 < \ell < 1.41$		85%
$Q < 3$		98,77%
Q moy		1,60
temps maillage		4 min sur 1 proc.
temps solveurs		4 h sur 5 proc.

Climatisation dans une maison



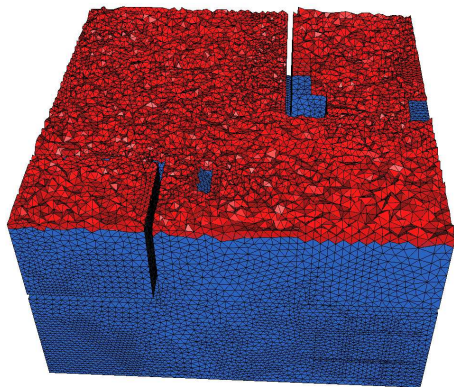
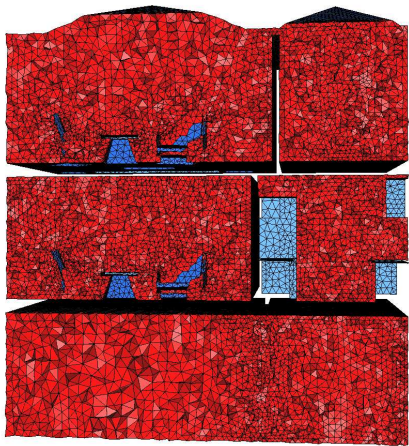
Simulation de climatisation dans une maison meublée :
géométrie.

Climatisation dans une maison



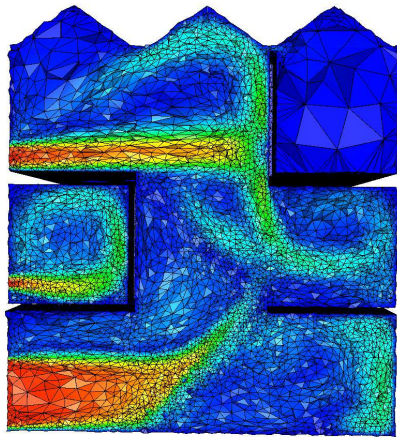
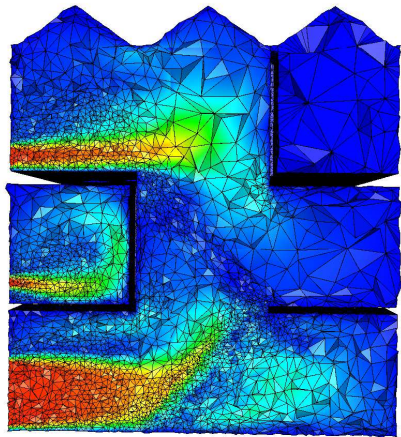
Simulation de climatisation dans une maison meublée :
lignes de courant de l'écoulement.

Climatisation dans une maison



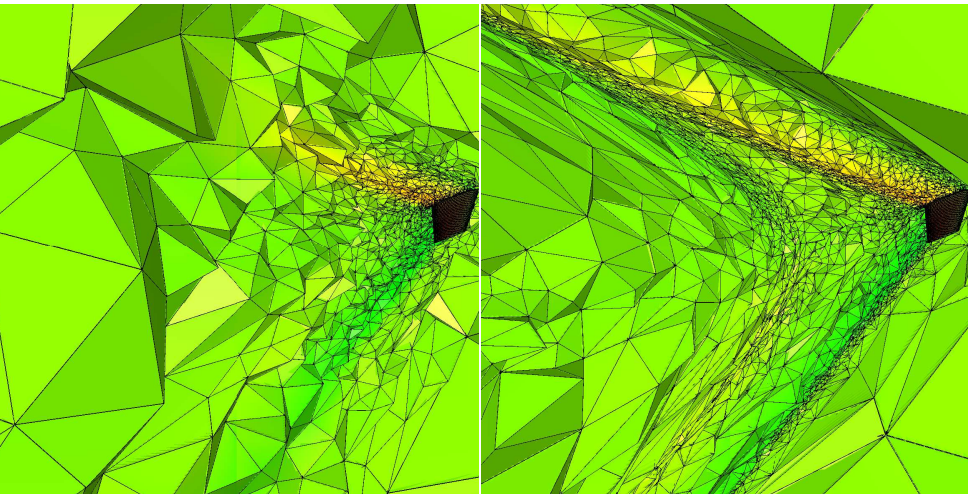
Simulation de climatisation dans une maison meublée :
maillage initial.

Climatisation dans une maison



Simulation de climatisation dans une maison meublée :
coupe volumique au temps $t = 2$ et $t = 26$ sec.

Aile AGARD en régime supersonique



Coupes volumiques associées au nombre de Mach (itérations 1 et 10).

Application au mouvement de corps rigides

Données : déplacement v_0 prescrit en tout point d'une frontière Γ_m ,

Prescription du déplacement : résolution d'un problème d'élasticité dans le domaine Ω :

$$\begin{cases} \lambda \Delta v + \mu \nabla(\nabla \cdot v) &= 0 & \text{dans } \Omega \\ v &= v_0 & \text{sur } \Gamma_m \\ v &= 0 & \text{sur } \Gamma_f \end{cases}$$

avec λ et μ les coefficients de Lamé,

Résolution de ce problème avec FreeFem3d : éléments finis P^1 , GC, préconditionneur : Choleski,

Mouvement du maillage : utilisation de modifications locales.

Exemple de mouvements de corps rigides

$$\text{particule 1 : } 0,6 \times \sin\left(\frac{k\pi}{20}\right)$$

$$\text{particule 2 : } 0,5 \times \sin\left(\frac{(k-19)\pi}{25}\right)$$

	initial	75e bougé
nb de points	11 559	11 559
nb de tetras	60 335	59 897
$1 < Q < 3$	100%	99,83%
Q moy	1,44	1,58
Q pire	4,46	5,05
temps maill.		34,55 s
temps solveur		25 s