

Schéma décentré pour l'équation level set en maillage non structuré

Malcom Djenno

Laboratoire de Mathématiques

Université Blaise Pascal

Clermont-Ferrand, France

31 Mai 2006

Plan de l'exposé

- 1 Equation de level set
- 2 Quelques notations
- 3 Schémas proposés
- 4 Résultats numériques
- 5 Références

Equation de level set

- Soit $T > 0$. Etant donné Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et une fonction $F : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$,
l'équation level set (voir [4]) s'écrit :
- Trouver $\Phi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\partial_t \Phi(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t) |\nabla \Phi|(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.1)$$

- Condition initiale au temps $t = 0$.

Conditions de bord si $\Omega \neq \mathbb{R}^2$

- Dirichlet
- Neumann

Equation d'Hamilton-Jacobi

En posant $H(\mathbf{x}, t, \nabla\Phi) = F(\mathbf{x}, t) |\nabla\Phi|$, on réécrit l'équation précédente sous la forme suivante :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + H(\mathbf{x}, t, \nabla\Phi) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.2)$$

où $H(\mathbf{x}, t, \nabla\Phi)$ s'appelle l' **Hamiltonien**.

Solutions de viscosité

- $\|\Phi(., t) - \psi(., t)\| \leq \|\Phi_0(.) - \psi_0(.)\|$

Maillage

B_i = centre du triangle K_i .

S_{ij} = côté commun aux triangles K_i et K_j .

ν_{ij} = normale au côté S_{ij} orientée de K_i vers K_j .

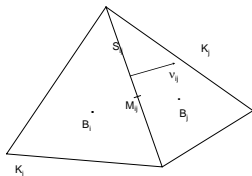


FIG.: Eléments du maillage

Maillage (suite)

Ω = domaine ouvert borné polygonal.

\mathcal{T}_h = triangulation de Ω .

N = nombre d'éléments.

M = nombre de noeuds.

Si $j \in \nu(i)$ alors $K_j \cap K_i \neq \emptyset$.

Si $i \in \nu(k)$ alors K_i contient le point P_k .

Forme générale des schémas

On se donne ϕ_k^n , et on calcule ϕ_k^{n+1} par

$$\phi_k^{n+1} = \phi_k^n + \Delta t H_k(\mathbf{U}_1^n, \dots, \mathbf{U}_{|\nu(k)|}^n).$$

Le procédé de calcul de $\mathbf{U}_i^n, i \in \nu(k)$, sera précisé plus tard.

H_k est l'**Hamiltonien numérique**.

Consistance

Le schéma est dit **consistant**

si $\phi_k^0 = b_0 + a_1 x_k + a_2 y_k \quad \forall (x_k, y_k)$ on a $\phi_k^n = \phi_k^0 - t^n H(\mathbf{a})$.

Cette propriété est toujours réalisée si l'hamiltonien numérique vérifie $H_k(\mathbf{U}, \dots, \mathbf{U}) = H(\mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^2$.

Monotonie

Etant donnés ϕ_k^n, ψ_k^n , on calcule ϕ_k^{n+1} et ψ_k^{n+1} par

$$\phi_k^{n+1} = \phi_k^n + \Delta t H_k(\mathbf{U}_1^n, \dots, \mathbf{U}_{|\nu(k)|}^n),$$

$$\psi_k^{n+1} = \psi_k^n + \Delta t H_k(\mathbf{V}_1^n, \dots, \mathbf{V}_{|\nu(k)|}^n),$$

Le procédé de calcul de \mathbf{U}_i^n et \mathbf{V}_i^n , $i \in \nu(k)$, sera précisé plus tard.

Le schéma est dit **monotone** si $\phi_k^n \geq \psi_k^n$ implique $\phi_k^{n+1} \geq \psi_k^{n+1}$.

Espaces d'approximation

$\mathcal{V}_h^0 = \{\lambda \in L^\infty(\Omega), \forall K_i \in \mathcal{T}_h \lambda|_{K_i} \in \mathbb{R}\}$, de base $1_{K_i}, i = 1, \dots, N$.

$\mathcal{V}_h^1 = \{\lambda \text{ continue sur } \Omega, \forall K_i \in \mathcal{T}_h \lambda|_{K_i} \in \mathbb{P}^1\}$, de base $\lambda_k, k = 1, \dots, M$.

$$\phi_k^n \approx \Phi(P_k, t^n), \quad \phi_h^n = \sum_{k=1}^M \phi_k^n \lambda_k \quad (\phi_h^n \in \mathcal{V}_h^1).$$

$$U_i^n \approx \nabla \Phi|_{K_i}, \quad U_h^n = \sum_{i=1}^N U_i^n 1_{K_i} \quad (U_h^n \in \mathcal{V}_h^0 \times \mathcal{V}_h^0).$$

$$U_k^n \approx \nabla \Phi(P_k, t^n).$$

Un schéma simple

Calcul de $\phi_h^{n+1} \in \mathcal{V}_h^1$

$$U_i^n = \nabla \phi_h^n|_{K_i}, \quad \tilde{U}_k^n = \frac{\sum_{i \in \nu(k)} |K_i| |U_i^n|}{\sum_{i \in \nu(k)} |K_i|},$$

$$\phi_k^{n+1} = \phi_k^n - \Delta t F(P_k, t^n) \tilde{U}_k^n, \quad \phi_h^{n+1} = \sum_{k=1}^M \phi_k^{n+1} \lambda_k.$$

Autre formulation

$$\partial_t \Phi + F |\nabla \Phi| = 0.$$

Si $\nabla \Phi \neq 0$, on a : $\partial_t \Phi + F \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \cdot \nabla \Phi = 0$,

soit encore $\partial_t \Phi + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi = 0$,

avec $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t, \nabla \Phi) = F(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|}(\mathbf{x}, t)$.

Difficultés

- Equation de convection non linéaire et non conservative
- Les méthodes numériques pour les équations de type convection ne sont pas facilement applicables
- Démarche non valable si $\nabla \Phi \neq 0$

Lemme

Soit D_k^n la droite de direction \tilde{U}_k^n passant par le point P_k , alors cette droite coupe en amont un triangle d'indice $\rho(k) \in \nu(k)$.

Une autre approximation de $\nabla\Phi$ au point P_k est donnée par

$$U_k^n = U_{\rho(k)}^n.$$

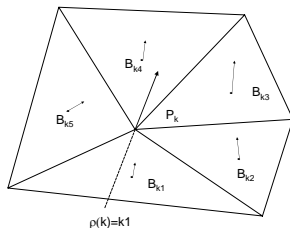


FIG.: Direction caractéristique au point P_k .

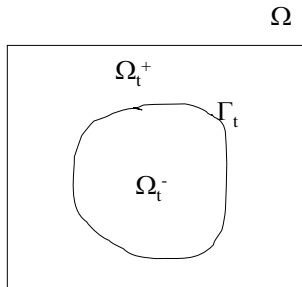
Schéma décentré

On calcule $\phi_h^{n+1} \in \mathcal{V}_h^1$, par

- 1) $U_i^n = \nabla \phi_{h|K_i}^n, \tilde{U}_k^n = \frac{\sum_{i \in \nu(k)} |K_i| |U_i^n|}{\sum_{i \in \nu(k)} |K_i|},$
- 2) U_k^n (lemme), $V_k^n = \frac{U_k^n}{|U_k^n|},$
- 3) $\phi_k^{n+1} = \phi_k^n - \Delta t \mathbf{v}_k^n \cdot U_k^n = \phi_k^n - \Delta t U_k^n,$
- 4) $\phi_h^{n+1} = \sum_{k=1}^{k=M} \phi_k^{n+1} \lambda_k.$

Frontière libre

$T = 1,$
 $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1],$
 Ω est composé de deux sous
domaines Ω_t^+ et Ω_t^- séparés
par une frontière libre Γ_t .



Test avec une fonction à gradient discontinu

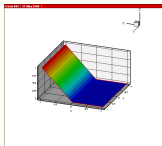


FIG.: solution exacte

Résultats numériques

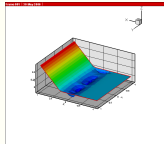


FIG.: solution calculée par le schéma non monotone

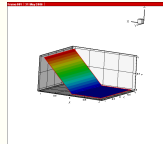






FIG.: solution calculée par le schéma décentré

Références

-  R. ABGRALL. *Numerical Discretization of the First-order Hamilton-Jacobi equations on Triangular Meshes*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1996.
-  G. BARLES. (1994). *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, In mathématiques et Applications, Vol. 17, Springer-Verlag.
-  M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277**, (1983), pp 1-42.
-  M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Two Approximations of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Math. Comp. 43(167), (1984), pp 1-19.

Références



R. ABGRALL. *Numerical Discretization of the First-order Hamilton-Jacobi equations on Triangular Meshes*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1996.



G. BARLES. (1994). *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, In mathématiques et Applications, Vol. 17, Springer-Verlag.



M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277**, (1983), pp 1-42.



M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Two Approximations of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Math. Comp. 43(167), (1984), pp 1-19.

Références



R. ABGRALL. *Numerical Discretization of the First-order Hamilton-Jacobi equations on Triangular Meshes*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1996.



G. BARLES. (1994). *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, In mathématiques et Applications, Vol. 17, Springer-Verlag.



M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277**, (1983), pp 1-42.



M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Two Approximations of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Math. Comp. 43(167), (1984), pp 1-19.

Références



R. ABGRALL. *Numerical Discretization of the First-order Hamilton-Jacobi equations on Triangular Meshes*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1996.



G. BARLES. (1994). *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, In mathématiques et Applications, Vol. 17, Springer-Verlag.



M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277**, (1983), pp 1-42.



M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Two Approximations of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Math. Comp. 43(167), (1984), pp 1-19.

Références



R. ABGRALL. *Numerical Discretization of the First-order Hamilton-Jacobi equations on Triangular Meshes*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1996.







G. BARLES. (1994). *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, In mathématiques et Applications, Vol. 17, Springer-Verlag.











M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277**, (1983), pp 1-42.











M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Two Approximations of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Math. Comp. 43(167), (1984), pp 1-19.

-  P. L. Lions *Neumann type boundary conditions for Hamilton-Jacobi equations*. Duke Mathematical journal, 1985.
-  P. L. Lions *Generalize solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman Advanced Publishing Program, 1981.
-  J.A. SETHIAN. *Level Set Methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1996.
-  S. Osher and J.A. Sethian. *Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-jacobi formulations*. J. Comput. Phys. 1988.

-  P. L. Lions *Neumann type boundary conditions for Hamilton-Jacobi equations*. Duke Mathematical journal, 1985.
-  P. L. Lions *Generalize solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman Advanced Publishing Program, 1981.
-  J.A. SETHIAN. *Level Set Methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1996.
-  S. Osher and J.A. Sethian. *Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-jacobi formulations*. J. Comput. Phys. 1988.

-  P. L. Lions *Neumann type boundary conditions for Hamilton-Jacobi equations*. Duke Mathematical journal, 1985.
-  P. L. Lions *Generalize solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman Advanced Publishing Program, 1981.
-  J.A. SETHIAN. *Level Set Methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1996.
-  S. Osher and J.A. Sethian. *Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-jacobi formulations*. J. Comput. Phys. 1988.

-  P. L. Lions *Neumann type boundary conditions for Hamilton-Jacobi equations*. Duke Mathematical journal, 1985.
-  P. L. Lions *Generalize solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman Advanced Publishing Program, 1981.
-  J.A. SETHIAN. *Level Set Methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1996.
-  S. Osher and J.A. Sethian. *Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-jacobi formulations*. J. Comput. Phys. 1988.

-  P. L. Lions *Neumann type boundary conditions for Hamilton-Jacobi equations*. Duke Mathematical journal, 1985.
-  P. L. Lions *Generalize solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman Advanced Publishing Program, 1981.
-  J.A. SETHIAN. *Level Set Methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1996.
-  S. Osher and J.A. Sethian. *Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-jacobi formulations*. J. Comput. Phys. 1988.