

Un schéma MURD conservatif pour les problèmes
de convection linéaire posés sur un domaine mobile.
Application aux écoulements à surface libre
incompressibles en dimension trois

Astrid Decoene, INRIA
Jean-Frédéric Gerbeau, INRIA

Travail effectué en collaboration avec le LNHE (edf R&D)

CANUM 2006, 29 mai - 2 juin

collaboration INRIA - LNHE (edf R&D)

- travail autour des équations de Navier-Stokes à **surface libre** en **dimension trois**
- amélioration de leur résolution par le code Telemac-3D

Travail présenté ici : extension aux **domaines mobiles** des schémas MURD pour la **convection linéaire des scalaires** (composantes de la vitesse et traceurs) dans le cadre ALE

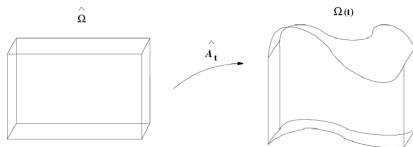
→ conséquence sur la propriété de **conservation**

- 1 Introduction à la formulation Arbitraire Euler-Lagrange (ALE)
- 2 Problématique
- 3 Résultats
- 4 Application à Telemac-3D

La formulation ALE

Principe = déplacement du maillage à une vitesse arbitraire

- Définition d'une **transformation ALE** : $\hat{\mathcal{A}}_t : \hat{\Omega} \longrightarrow \Omega_t$



$$\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}, \quad \mathbf{x} = \hat{\mathcal{A}}_t(\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\psi}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \psi(\mathbf{x}, t)$$

Vitesse du domaine : $\mathbf{c}(\hat{\mathcal{A}}_t(\hat{\mathbf{x}}), t) = \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_t}{\partial t}(\hat{\mathbf{x}})$

- $\hat{\mathcal{A}}_t$ doit être conforme au déplacement des frontières du domaine :
 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ aux frontières physiques

Problématique

- **Motivation : défaut de conservation** des schémas distribués résolvant le problème de convection linéaire d'un scalaire dans le code Telemac-3D

→ mis en évidence lorsque la **transformation ALE** utilisée n'est pas la **transformation sigma classique**

Problématique plus générale : le mouvement du domaine peut avoir des conséquences négatives sur certains schémas numériques
= perte de précision, stabilité ou conservation

→ **analyse de l'extension** des schémas distribués aux **domaines mobiles** dans le cadre **ALE**

Schémas distribués pour la convection linéaire d'un scalaire

Schémas distribués type **MURD**
(Multidimensional Upwind Residual Distributive)
pour la convection linéaire d'un scalaire
avec **vitesse de convection à divergence nulle**

Schémas distribués pour la convection linéaire d'un scalaire

- On considère la formulation ALE de l'équation de convection linéaire d'un scalaire u sous **forme non conservative** et avec vitesse de convection β à **divergence nulle**

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\hat{x}} + (\beta - c) \cdot \nabla u = 0 \quad \text{dans } \Omega_t, \quad t \in I$$

Schémas distribués pour la convection linéaire d'un scalaire

- On considère la formulation ALE de l'équation de convection linéaire d'un scalaire u sous **forme non conservative** et avec vitesse de convection β à **divergence nulle**

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\hat{x}} + (\beta - c) \cdot \nabla u = 0 \quad \text{dans } \Omega_t, \quad t \in I$$

- Schéma en temps **explicite**

Schémas distribués pour la convection linéaire d'un scalaire

- On considère la formulation ALE de l'équation de convection linéaire d'un scalaire u sous **forme non conservative** et avec vitesse de convection β à **divergence nulle**

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\hat{x}} + (\beta - c) \cdot \nabla u = 0 \quad \text{dans } \Omega_t, \quad t \in I$$

- Schéma en temps **explicite**
- Discrétisation en espace : éléments finis Lagrangiens

pour tout $n = 0, \dots, N_t - 1$ trouver $u_h^{n+1} \in \mathcal{X}_{h,0}^{n+1}$ tel que

$$\int_{\Omega_h^{n+1}} (u_h^{n+1} - u_h^n \circ \mathcal{A}_{n+1,n}) \, dx + \Delta t \int_{\Omega_h^c} (\beta_h - c_h)^c \cdot \nabla (u_h^n \circ \mathcal{A}_{c,n}) \, dx = 0$$

Schémas distribués pour la convection linéaire d'un scalaire

Propriété des schémas considérés

Redistribution des flux locaux de chaque élément du maillage sur ses différents noeuds de façon à ce que le schéma soit :

- **consistant**
- **décentré**
- **monotone** (pas de création de nouveaux extrema)

Résultats

Toutes les propriétés des schémas sont préservées lorsque le domaine bouge **sauf la conservation de la quantité convectée**

Résultats

- ① **Expression de la **contrainte supplémentaire** que les schémas MURD doivent vérifier pour rester conservatifs lorsque le domaine bouge**
 - = généralisation dans le cadre ALE de (Janin, 1996)
(raisonnement dans le cas particulier des écoulements à surface libre avec transformation sigma classique)

Résultat 1

Propriété de conservation recherchée :

$$\int_{\Omega_h^{n+1}} u_h^{n+1} dx - \int_{\Omega_h^n} u_h^n dx = - \Delta t \int_{\Gamma_{liq}^c} (u_h^n \circ \mathcal{A}_{c,n}) (\beta_h - c_h)^c \cdot \mathbf{n}_h d\Gamma$$

On suppose la vitesse de convection discrète à divergence nulle (au moins) au sens faible :

$$\int_{\Omega_h^c} \psi_i^c \operatorname{div} \beta_h^c dx = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N_h,$$

Résultat 1

Proposition : Le schéma est conservatif si la relation suivante est vérifiée :

$$\forall n = 1, \dots, N_t, \quad \forall i = 1, \dots, N_h,$$

$$\int_{\Omega_h^{n+1}} \psi_i^{n+1} d\mathbf{x} - \int_{\Omega_h^n} \psi_i^n d\mathbf{x} - \Delta t \int_{\Omega_h^c} \psi_i^c \operatorname{div} \mathbf{c}_h^c d\mathbf{x} = 0$$

→ cette relation n'implique que des termes liés au mouvement du domaine

Remarque : forme discrète de la **Formule de transport de Reynolds**
 → lien avec la "**Loi de Conservation Géométrique**" (GCL)

Résultats

- 2 **Cas particulier des domaines 3D de mouvement uniquement vertical** → la contrainte de conservation est facilement vérifiée : il suffit de considérer une **vitesse du maillage constante par pas de temps**

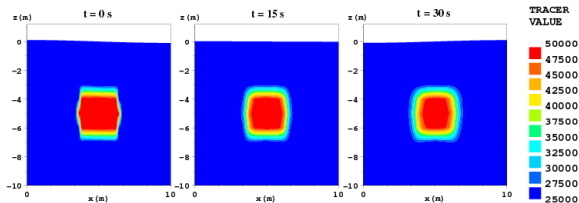
Vitesse du domaine : $\mathbf{c}(\hat{\mathcal{A}}_t(\hat{\mathbf{x}}), t) = \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_t}{\partial t}(\hat{\mathbf{x}}) = (0, 0, c)$

Déplacement du maillage : pour tout point $\hat{\mathbf{x}}$ du maillage fixe

$$\mathbf{x} = \hat{\mathcal{A}}_{h,n+1}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathcal{A}}_{h,n}(\hat{\mathbf{x}}) + \Delta t \hat{\mathbf{c}}_h^{n,n+1}$$

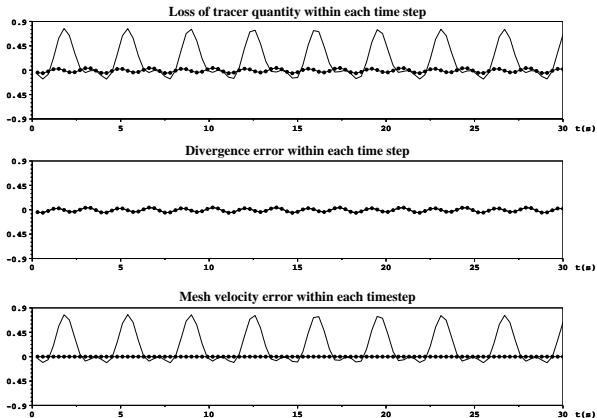
Résultat 2 : illustration par un cas test

Convection d'un traceur dans un bassin fermé avec onde oscillatoire



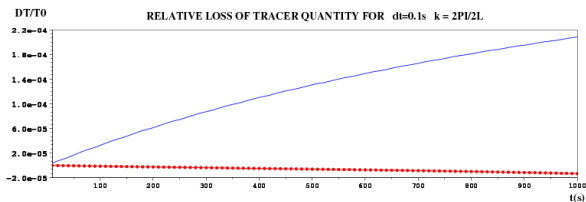
Résultat 2 : illustration par un cas test

Convection d'un traceur dans un bassin fermé avec onde oscillatoire



Résultat 2 : illustration par un cas test

Convection d'un traceur dans un bassin fermé avec onde oscillatoire



Application à Telemac-3D

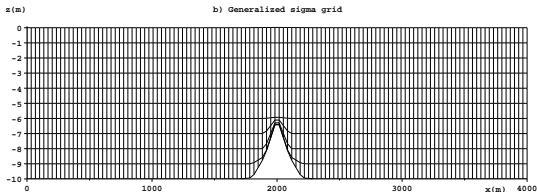
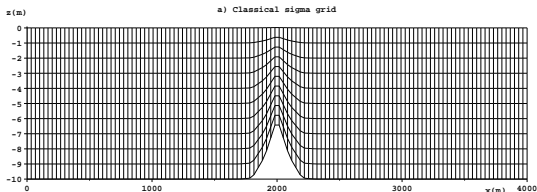
Correction du défaut de conservation des schémas MURD dans Telemac-3D

grâce à la vérification de **l'expression de la contrainte de conservation dans le cadre ALE général**

→ les schémas sont maintenant conservatifs
pour toute transformation ALE

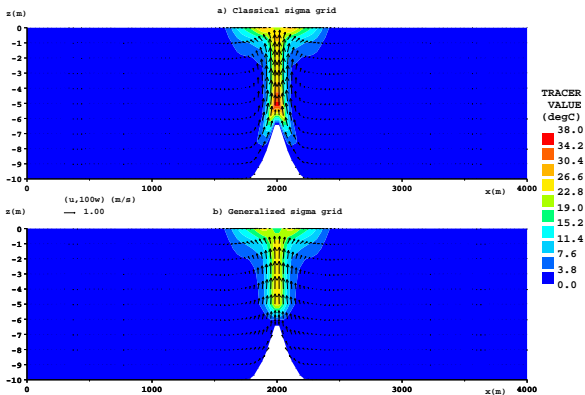
Convection d'un traceur actif dans un bassin fermé

Maillage a) : obtenu avec la transformation sigma classique
Maillage b) : obtenu avec une autre transformation



Convection d'un traceur actif dans un bassin fermé

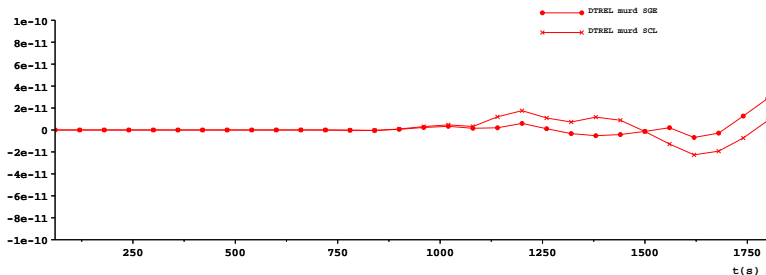
Profil du traceur à $t = 1800s$



Convection d'un traceur actif dans un bassin fermé

Perte relative de la quantité de scalaire convecté

RELATIVE LOSS
OF TRACER QUANTITY



Conclusion

Travail effectué

- reformulation dans le cadre ALE des schémas de convection MURD
 - extension aux domaines mobiles
 - conservation améliorée (lien avec la GCL)

Perspectives

- vérification de la contrainte de conservation avec un ordre en temps plus élevé pour la vitesse du maillage
- application à d'autres schémas (SUPG)

Lien avec la Loi de Conservation Géométrique (GCL)

Formule de transport de Reynolds :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \psi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} + \psi(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{c} \right) d\mathbf{x}$$

= loi d'évolution pour le déterminant de la jacobienne

(Formaggia, Nobile, 1999) : schéma FEM pour le problème de convection-diffusion linéaire d'un scalaire sur un domaine mobile avec vitesse à divergence nulle

→ **GCL** : contrainte pour la préservation des solutions constantes

= discrétisation particulière de la formule de Reynolds



Formulation ALE

- Formalisme ALE : **dérivée en temps ALE** = dérivée par rapport au temps en un point qui reste constant dans le domaine de référence $\hat{\Omega}$
→ plus facile à discrétiser

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t}(\hat{\mathbf{x}}, t) \quad \text{où} \quad \hat{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x})$$

Formulation ALE

- Formalisme ALE : **dérivée en temps ALE** = dérivée par rapport au temps en un point qui reste constant dans le domaine de référence $\hat{\Omega}$
→ plus facile à discrétiser

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t}(\hat{\mathbf{x}}, t) \quad \text{où} \quad \hat{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x})$$

- Discrétisation spatiale : le domaine de référence $\hat{\Omega}$ est triangulé et la transformation ALE discrétisée. A chaque instant t , $\hat{\mathcal{A}}_{h,t}$ définit les coordonnées de chaque point i du maillage de référence dans le maillage réel :

$$\mathbf{x}_i(t) = \hat{\mathcal{A}}_{h,t}(\hat{\mathbf{x}}_i)$$

- mise à jour du maillage totalement implicite
- pas d'interpolation des variables