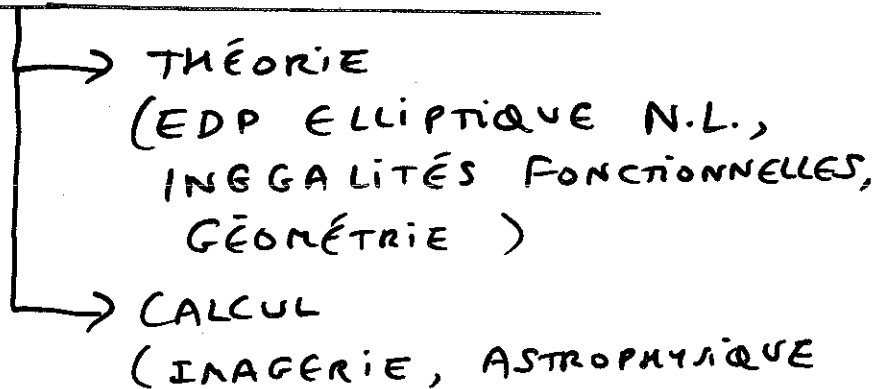


TRANSPORT DE COURANTS et ELECTROMAGNÉTISME

Y. BRENIER, CNRS, U. DE NICE

Domaines de recherche voisins:

TRANSPORT OPTIMAL DE DENSITÉS



ELECTROMAGNÉTISME NON-LINÉAIRE

↳ EDP HYPERBOLIQUES NON-LINÉAIRES,
LOIS DE CONSERVATION
LINÉAIREMENT DÉGÉNÉRÉES,
FORMES NULLES À LA KLAINERMAN

Approche similaire en imagerie

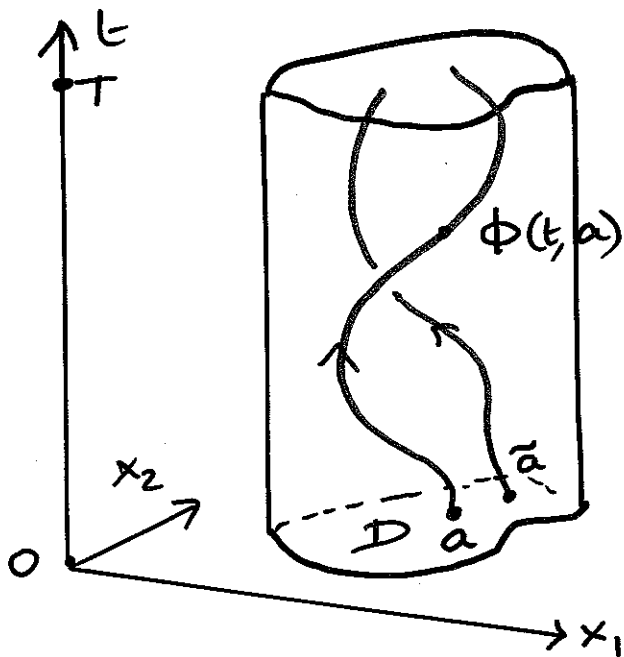
(thèse de I. GLAUNES dans la
suite de TROUVÉ-YOUNES)

②

Descriptions "particulaires" et

"eulériennes" d'un écoulement

bidimensionnel dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$



$$\phi(0, a) = a \in D$$

$$\partial_t \phi(t, a) = v(t, \phi(t, a))$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$\rho(t, x)$ densité du fluide ≥ 0

$\vec{v}(t, x)$ vitesse du fluide

COURANT =

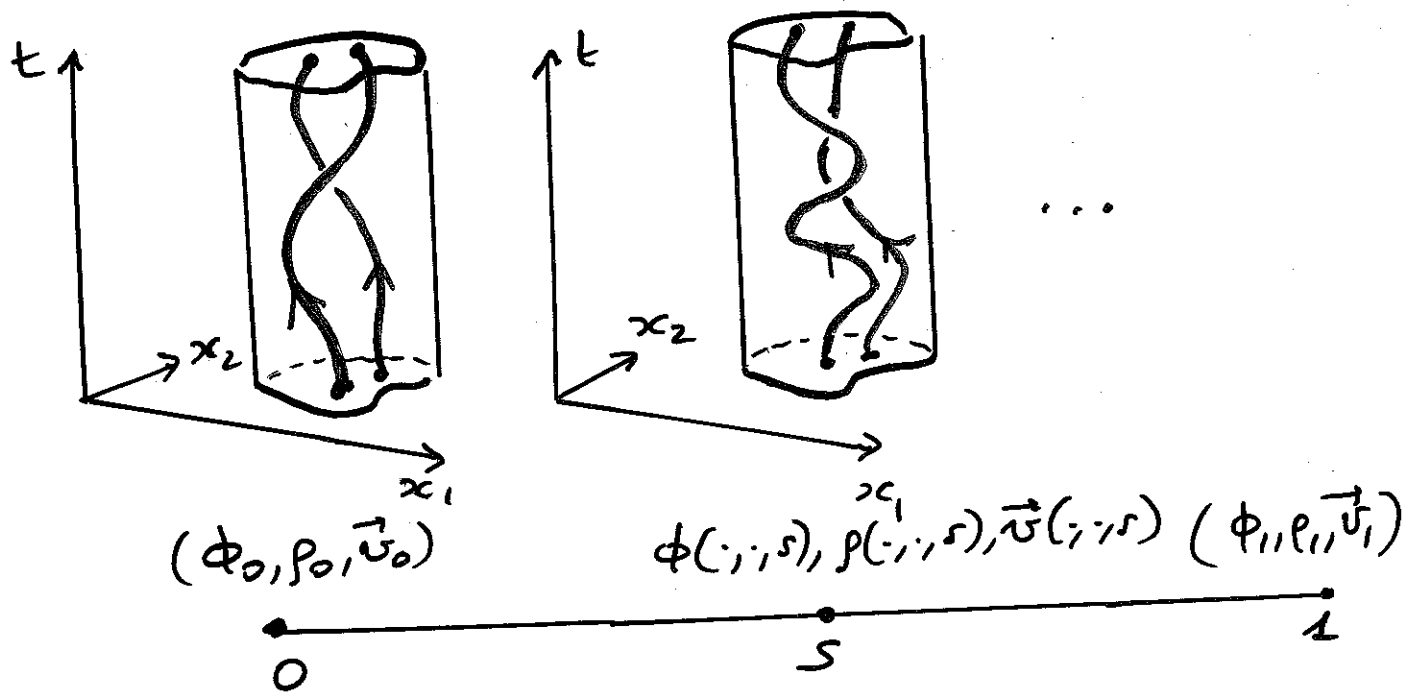
FLOT DE PARTICULES

EN DÉPLACEMENT

Interpolation de deux écoulements

décrits respectivement par:

- $\phi_0(t, a), \rho_0(t, x), \vec{v}_0(t, x)$ (premier fluide)
- $\phi_1(t, a), \rho_1(t, x), \vec{v}_1(t, x)$ (2ème fluide)



Écoulement interpolant à $s \in [0, 1]$:

$$\phi(t, a, s), \rho(t, x, s), \vec{v}(t, x, s)$$

$$\partial_t \phi(t, a, s) = \vec{v}(t, \phi(t, a, s), s), \phi(0, a, s) = a \in \mathcal{D}$$

Par symétrie, on définit:

$$\vec{b}(t, x, s) \text{ par: } \partial_s \phi(t, a, s) = \vec{b}(t, \phi(t, a, s), s)$$

CONDITIONS DE COMPATIBILITÉ

$$\partial_t \vec{b} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{b} = \partial_s \vec{v} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{v}$$

$$\text{et } \partial_s(\rho) + \nabla \cdot (\rho \vec{b}) = 0$$

" $\partial_{ts}^2 \phi = \partial_{st}^2 \phi$ "

PLUSIEURS APPROCHES:

① Approche statique:

t n'est qu'un paramètre,

à chaque t fixé, on ignore $\vec{v}(t, x, s)$

et on ne cherche qu'à interpoler $\rho_0(t, x)$

et $\rho_1(t, x)$ en recherchant $\vec{b}(t, x, s), \rho(t, x, s)$

tel que

$\partial_s \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{b}) = 0$ $\rho(s=0) = \rho_0, \rho(s=1) = \rho_1$
--

↳ "TRANSPORT OPTIMAL DE DENSITÉS"
DU "TRANSPORT DE MOSER"

② Approche dynamique:

t joue un rôle aussi important que x

On cherche ρ, \vec{v}, \vec{b} t.q.

$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ $\partial_s \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{b}) = 0$ $\partial_t \vec{b} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{b} = \partial_s \vec{v} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{v}$

↳ "TRANSPORT À LA BORN-INFELD"

Transport "optimal" (*)

(interprétation de : J.-D. Benamou, YB)
Num. Math. 2000

$$\text{Min} \int_0^1 ds \int_D \rho |\vec{b}|^2 dx$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Énergie cinétique}}$

$$\partial_s \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{b}) = 0 \text{ dans } D$$

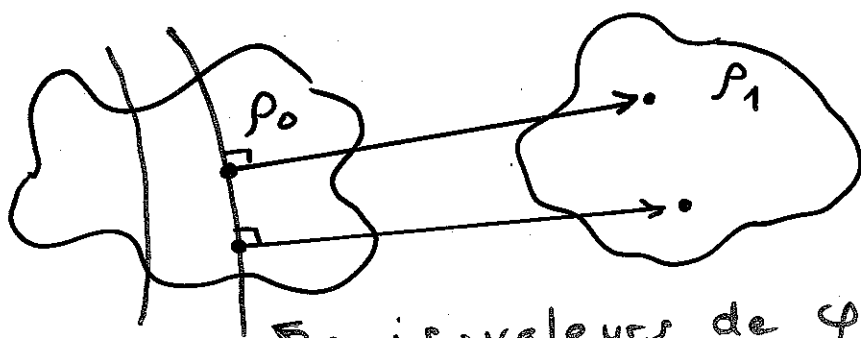
$$\rho(s=0) = \rho_0, \quad \rho(s=1) = \rho_1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

SOLUTION $\vec{b} = \nabla_x \varphi(x, s)$

avec $\partial_s \varphi + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 = 0$ (HJ sans choc!)

⇔ transport le long de géodésiques (lignes droites si D convexe)



En isovaleurs de $\varphi(x, s=0)$
 $\nabla \varphi(x, 0)$ donne la vitesse de tir vers la cible en chaque point x

(*) Livre de référence:

C. VILLANI, TOPICS ON OPTIMAL TRANSPORT THEORY
AMS 2003

Variante "électrostatique": ⑥

Le transport de Moser

(réinterprété)

J. Moser 1965

B. DaCrogna - J. Moser 1989

$$\text{Min} \int_0^1 ds \int_D \rho |\vec{b}|^2 dx$$

! → ②

Sous contraintes :

$$\partial_s \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{b}) = 0 \text{ dans } D$$

$$\rho(s=0) = \rho_0, \rho(s=1) = \rho_1 \text{ donnés}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

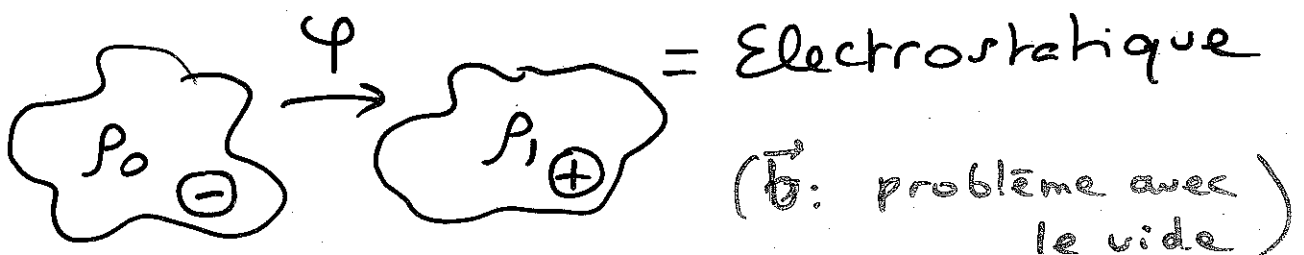
SOLUTION

$$\vec{q} =: \rho \vec{b} \text{ s'écrit } \vec{q} = \nabla \psi(x)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \rho_1 - \rho_0 + \Delta \psi = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial D \end{cases}$$

$$\rho(x, s) = \rho_0(x)(1-s) + \rho_1(x)s \quad (\text{trivial})$$

$$\vec{b}(x, s) = \frac{\nabla \psi(x)}{\rho(x, s)} \quad (\text{non trivial})$$



(7)

SOLUTION "ELECTROMAGNETIQUE"

au problème de transport de courant

Rappel : on cherche pour $x \in D, s \in [0, 1]$

$$t \rightarrow \vec{v}(t, x, s), \vec{b}(t, x, s), \rho(t, x, s)$$

satisfaisant $\partial_s \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{b}) = 0$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\partial_t \vec{b} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{b} = (b \cdot \nabla) \vec{v} + \partial_s \vec{v}$$

avec ρ, \vec{v} connus en $s=0, s=1$

ou : $\partial_t (\rho \vec{b}) + \nabla \cdot (\rho (\vec{b} \otimes \vec{v} - \vec{v} \otimes b)) - \partial_s (\rho \vec{v}) = 0$

ON INTRODUIT : $\underline{x} = (x, s) \in D \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$

$$\underline{\nabla} = (\nabla, \partial_s)$$

$$E(t, \underline{x}) = (-\rho v_2, \rho v_1, \rho(v_2 b_1 - v_1 b_2))$$

$$B(t, \underline{x}) = (\rho b_1, \rho b_2, \rho)$$

et les contraintes s'écrivent :

$$\underline{\nabla} \cdot B = 0, \quad \partial_t B + \nabla \times E = 0$$

et ... $\underline{E} \cdot \underline{B} = 0$

avec $B \cdot n$ et $E \times n$

connus en $\underline{x}_3 = 0$
et $\underline{x}_3 = 1$

L' ELECTROMAGNÉTISME

NON-LINÉAIRE DE BORN & INFELD

(Ann. IHP 1937)

principe variationnel:

BI = points critiques

$$\text{de } \mathcal{L} = \iint -\sqrt{\lambda^2 + B^2 - E^2} - \frac{(E \cdot B)^2}{\lambda^2} dxdt$$

sous contraintes $\nabla \cdot B = 0$

$$\partial_t B + \nabla \times E = 0$$

$\lambda =$ "champ électrostatique maximal"

(constante définie par Born en fonction de $c, q, m \dots$)

Deux régimes limites

$$\lambda \rightarrow \infty \quad \mathcal{L} \# \frac{E^2 - B^2}{2}$$

↳ Maxwell linéaire

$$\lambda \rightarrow 0 \quad \mathcal{L} \sim \iint -\sqrt{B^2 - E^2} dxdt$$

sous contrainte $E \cdot B \equiv 0$

ANALYSE MATHÉMATIQUE :

(9)

C'est le régime $\lambda \rightarrow 0$

qui est pertinent pour nous,

car $E \cdot B = 0$
est garanti !

$$\iint_{\Omega \subset \mathbb{R}^4} -\sqrt{B^2 - E^2} \, d\underline{x} \, dt$$

$$= \iiint_{0 \leq t \leq T} -\rho \, ds \, dx \, dt \sqrt{(1 + \vec{b}^2)(1 - \vec{v}^2) + (\vec{b} \cdot \vec{v})^2}$$

$$\Omega =]0, T[\times]0, 1[\times]0, 1[\times]0, T[$$

$$= \iiint -\sqrt{(1 + |\partial_s \phi|^2)(1 - |\partial_t \phi|^2) + (\partial_t \phi \cdot \partial_s \phi)^2} \, da \, ds \, dt$$

Pour chaque $a \in D$ fixé

$$-\iint ds \, dt \sqrt{(1 + \partial_s \phi^2)(1 - \partial_t \phi^2) + (\partial_t \phi \cdot \partial_s \phi)^2}$$

est l'aire de la surface

$$(t, s) \rightarrow (t, \phi(t, a, s), s) \in \mathbb{R}^4_{(-+++)}$$

pour la métrique de Minkowski.

DANS LA LIMITE $\lambda = 0$
BORN-INFELD DÉCRIT UN
CONTINUUM DE SURFACES
EXTRÉMALES DANS L'ESPACE DE
MINKOWSKI (i.e. CORDES RELATIVISTES)

EQUATION D'UN CONTINUUM DE CORDES VIBRANTES

(NON NÉCESSAIREMENT
RELATIVISTES)

Description "particulaire"

Pour chaque $a \in \mathcal{D}$

$$s \in [0, 1] \rightarrow \phi(t, a, s)$$



véritable

$$\partial_{tt} \phi = \partial_{ss} \phi$$

(N.B. si $\partial_t \phi \cdot \partial_s \phi = 0$ et $|\partial_t \phi|^2 + |\partial_s \phi|^2 = 1$
 ϕ est une corde relativiste)

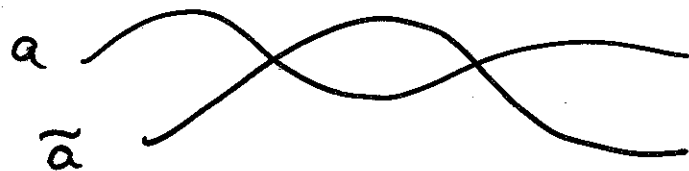
Description "eulérienne"

Comme $\partial_s \phi(t, a, s) = \vec{b}(t, \phi(t, a, s), s)$
 $\partial_t \phi(t, a, s) = \vec{v}(t, \phi(t, a, s), s)$

on trouve: $\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b} + \partial_s \vec{b}$

(\approx MHD)

Problème des croisements de cordes



→ dans les cas les plus
simples, on a un bon
concept de "solutions de viscosité"
(ou "solutions entropiques")

pour traiter ce problème, au prix
de la dissipation de l'énergie du
système.

En 1d

$$\partial_t b + v \partial_x b = b \partial_x v$$

$$\partial_t v + v \partial_x v = b \partial_x b + \text{dissipation}$$

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 - \rho b^2) = \underbrace{\varepsilon}_{\downarrow 0} \partial_x(\mu(\rho) \partial_x v)$$

avec $\mu(\rho) > 0$, par ex. $\mu(\rho) = 1$

CONCLUSIONS

- Le concept de transport optimal de densité se généralise bien aux courants
- L'équation de Born-Infeld fait le pont entre Maxwell linéaire, le transport de courant et les cordes relativistes
- Une notion de solution de viscosité est possible pour décrire des continus de cordes "collantes" qui ne peuvent se croiser.