Propagation du son dans un écoulement : simulation numérique du régime périodique établi

CANUM 2006

A.-S. Bonnet-Ben Dhia

et

E. Bécache, E.-M. Duclairoir, G. Legendre et J.-F. Mercier

POEMS **UMR 2706 CNRS-INRIA-ENSTA**

Propagation des Ondes : Etude Mathématique et Simulation

Partenariat avec EADS

Motivations

Réduire les nuisances sonores dans les transports est un enjeu socio-économique important

aéronautique, industrie spatiale, échappements etc..

▶▶ Essor de l'aéroacoustique numérique

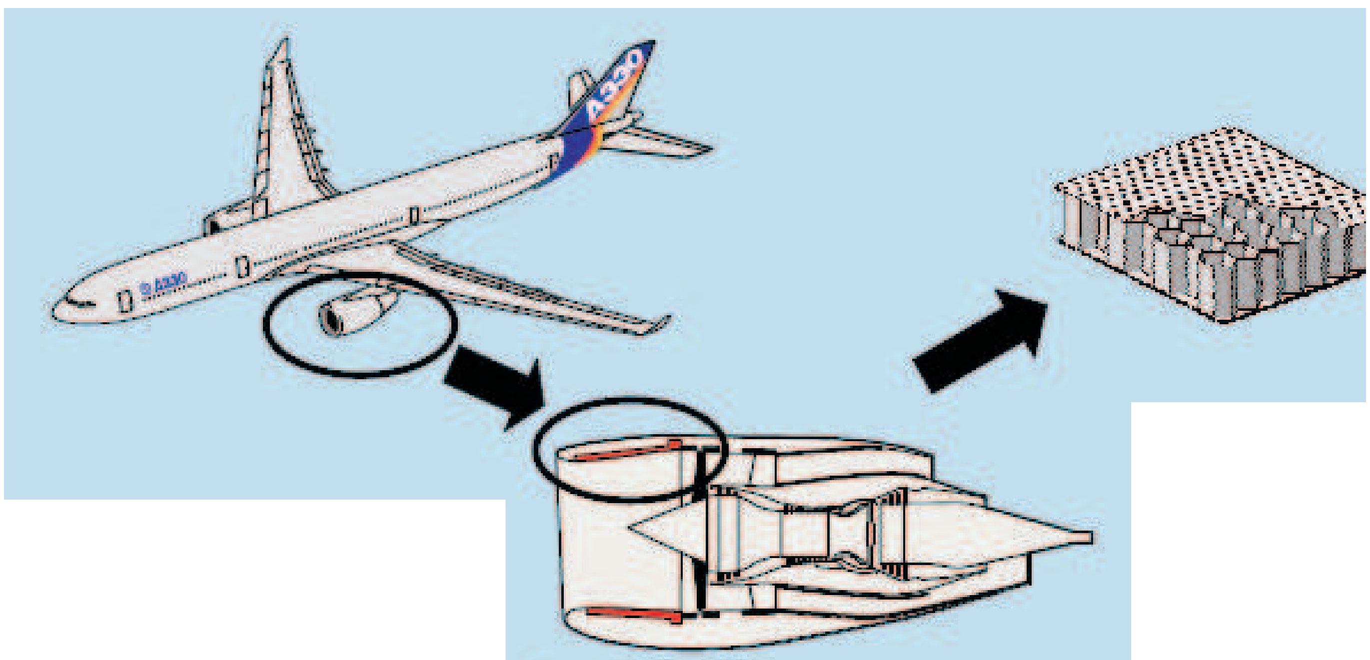
Motivations

Réduire les nuisances sonores dans les transports est un enjeu socio-économique important

aéronautique, industrie spatiale, échappements etc..

▶▶ Essor de l'aéroacoustique numérique

AIRBUS :



Motivations

Réduire les nuisances sonores dans les transports est un enjeu socio-économique important

aéronautique, industrie spatiale, échappements etc..

- Essor de l'aéroacoustique numérique

L'aéroacoustique est aussi un sujet de recherche intéressant, à l'interface entre l'acoustique et la mécanique des fluides

- Phénomènes riches et nombreuses questions ouvertes

L’aéroacoustique

Deux problématiques différentes :

L'aéroacoustique

Deux problématiques différentes :

- La production du bruit par un écoulement.

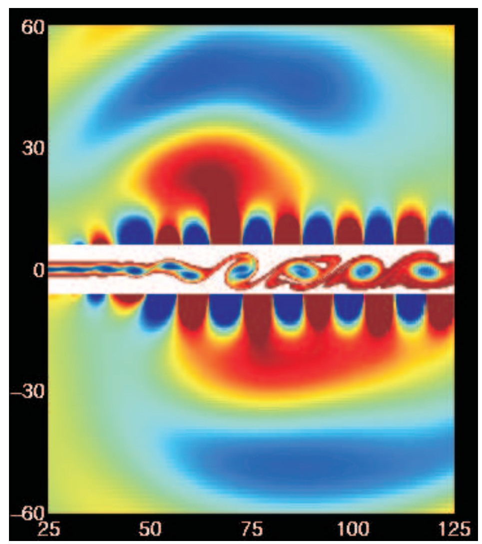
Problème non linéaire, simulation numérique directe à l'échelle des tourbillons

L'aéroacoustique

Deux problématiques différentes :

- La production du bruit par un écoulement.

Problème non linéaire, simulation numérique directe à l'échelle des tourbillons



Bogey et al., AIAA Journal, 2000 (LMFA, Ecole Centrale de Lyon)

L'aéroacoustique

Deux problématiques différentes :

- La production du bruit par un écoulement.

Problème non linéaire, simulation numérique directe à l'échelle des tourbillons

- La propagation du son dans un écoulement.

L’aéroacoustique

- La production du bruit par un écoulement.

Problème non linéaire, simulation numérique directe à l’échelle des tourbillons

- La propagation du son dans un écoulement.

Problème linéarisé, résolution envisageable à l’échelle 1

Lien entre les 2 problématiques : calcul des termes de source acoustique à partir de l’aérodynamique.

L'aéroacoustique

- La propagation du son dans un écoulement.

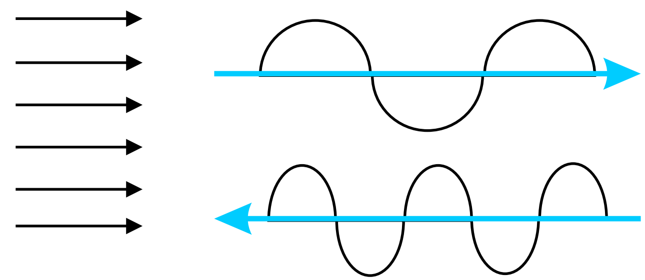
Des phénomènes variés :

L'aéroacoustique

- La propagation du son dans un écoulement.

Des phénomènes variés :

Effet Doppler :

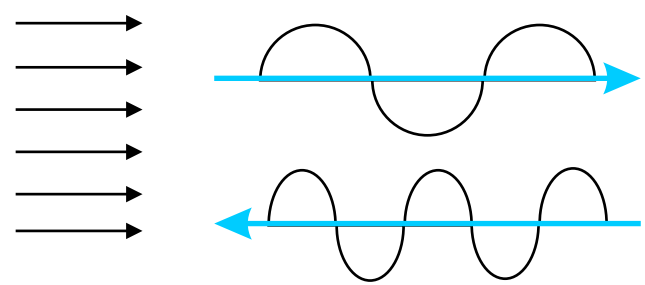


L'aéroacoustique

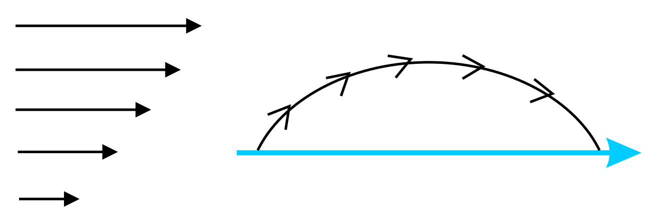
- La propagation du son dans un écoulement.

Des phénomènes variés :

Effet Doppler :



Réfraction, guidage :

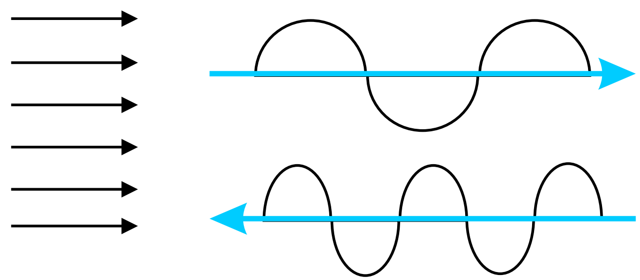


L'aéroacoustique

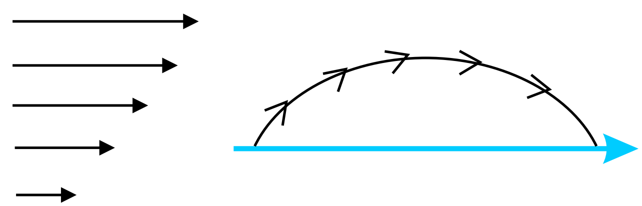
- La propagation du son dans un écoulement.

Des phénomènes variés :

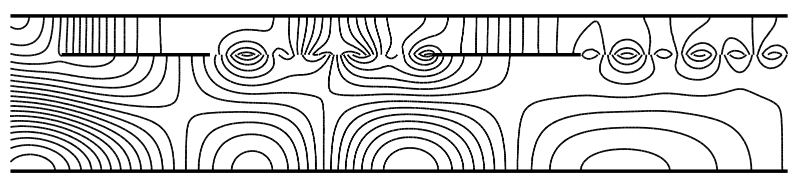
Effet Doppler :



Réfraction, guidage :



Phénomènes hydrodynamiques (sillage, instabilité)



E. Lunéville et J.-F. Mercier JCA, 2005

Modèles linéarisés

- L'inconnue est une petite perturbation d'un écoulement donné
- Un problème vectoriel ($\neq$ acoustique dans un fluide au repos)

Modèles linéarisés

Deux modèles possibles :

1. Equations d'Euler Linéarisées :
   - Système du premier ordre en $(\boldsymbol{v}, p)$ (vitesse et pression)
   - L'approche la plus utilisée
     (Bailly et Bogey (ECL), Delorme et Peyret (ONERA), Joly, Piperno (INRIA))
   - Simulations temporelles
2. Equation de Galbrun :
   - Système du second ordre en $\boldsymbol{u}$ (déplacement)
   - Moins classique bien que très similaire aux autres modèles d'ondes (Poirée, Ben Tahar (UTC), Brazier (ONERA))
   - Mieux adapté à la prise en compte des CL

Plan

Plan

1. Position du problème

Plan

1. Position du problème
   - Equation de Galbrun
   - Cas d'un écoulement uniforme
   - Modes et condition de rayonnement

Plan

1. Position du problème
2. La régularisation

Plan

1. Position du problème
2. La régularisation
   - Sans écoulement
   - Avec écoulement

Plan

1. Position du problème
2. La régularisation
3. Résoudre le problème dans un conduit infini

Plan

1. Position du problème
2. La régularisation
3. Résoudre le problème dans un conduit infini
   - Avec de la dissipation
   - Avec des PML
   - Résultats numériques

Plan

1. Position du problème
2. La régularisation
3. Résoudre le problème dans un conduit infini
4. Un nouveau modèle pour les Mach faibles

Plan

1. Position du problème
2. La régularisation
3. Résoudre le problème dans un conduit infini
4. Un nouveau modèle pour les Mach faibles
    - Le nouveau modèle
    - Validation numérique

Hypothèses

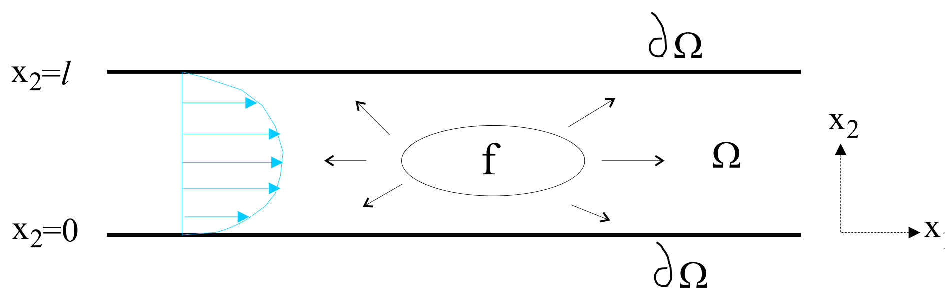
Notre objectif : Développer une méthode générale d'éléments finis pour résoudre l'équation de Galbrun en régime périodique établi.

Hypothèses

- Problème 2D, régime périodique établi
- Conduit infini, parois rigides
- Ecoulement parallèle subsonique et stable

$$0 < M(x_2) < 1 \text{ et } M'' \neq 0$$

- Source : $\Re e\,(\boldsymbol{f}(x)e^{-i\omega t})$, $\omega > 0$.



Equation de Galbrun

Inconnue : Perturbation de déplacement Lagrangien

$$\Re e\left(\boldsymbol{u}(x)e^{-i\omega t}\right), \quad \omega > 0$$

Equations :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}}$$

où $\mathrm{D} = -ik + M(x_2)\dfrac{\partial}{\partial x_1}$

Equation de Galbrun

Inconnue : Perturbation de déplacement Lagrangien

$$\Re e\left(\boldsymbol{u}(x)e^{-i\omega t}\right), \quad \omega > 0$$

Equations :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}}$$

où $\mathrm{D} = -ik + M(x_2)\dfrac{\partial}{\partial x_1}$

Ecriture développée :

$$-k^2\boldsymbol{u} - 2ikM(x_2)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + M(x_2)^2\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial x_1^2} - \boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$$

Equation de Galbrun

Inconnue : Perturbation de déplacement Lagrangien

$$\Re e\left(\boldsymbol{u}(x)e^{-i\omega t}\right), \quad \omega > 0$$

Equations :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}}$$

où $\mathrm{D} = -ik + M(x_2)\,\dfrac{\partial}{\partial x_1}$

Difficultés :

- Conditions de radiation ?
- Cadre fonctionnel ?

Ecoulement uniforme

Ecoulement uniforme $M'(x_2) = 0$

$\Rightarrow$ Découplage acoustique/hydrodynamique

La pression acoustique $p = -\operatorname{div} \boldsymbol{u}$ et les tourbillons $\psi = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ vérifient des problèmes découplés.

Ecoulement uniforme

$$p = -\operatorname{div} \boldsymbol{u} \quad \text{(pression acoustique)}$$
$$\psi = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \quad \text{(tourbillons)}$$

Ecoulement uniforme

$$p = -\operatorname{div} \boldsymbol{u} \quad \text{(pression acoustique)}$$
$$\psi = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \quad \text{(tourbillons)}$$

- Acoustique :

$$\boxed{\mathrm{D}^2 p - \Delta p = -\operatorname{div} \boldsymbol{f} \quad (\Omega), \quad \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad (\partial\Omega)}$$

(Equation de Helmholtz convectée)

Ecoulement uniforme

$$p = -\operatorname{div} \boldsymbol{u} \quad \text{(pression acoustique)}$$
$$\psi = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \quad \text{(tourbillons)}$$

- Acoustique :

$$\boxed{\mathrm{D}^2 p - \Delta p = -\operatorname{div} \boldsymbol{f} \quad (\Omega), \qquad \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad (\partial\Omega)}$$

(Equation de Helmholtz convectée)

Forme développée :

$$-\left((1 - M^2)\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}\right) - 2ikM\frac{\partial p}{\partial x_1} - k^2 p = -\operatorname{div} \boldsymbol{f}$$

(mêmes propriétés que l'équation de Helmholtz)

Ecoulement uniforme

$$p = -\operatorname{div} \boldsymbol{u} \quad \text{(pression acoustique)}$$
$$\psi = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \quad \text{(tourbillons)}$$

- Acoustique :

$$\boxed{\mathrm{D}^2 p - \Delta p = -\operatorname{div} \boldsymbol{f} \quad (\Omega), \qquad \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad (\partial\Omega)}$$

(Equation de Helmholtz convectée)

- Hydrodynamique :

$\boxed{\mathrm{D}^2 \psi = \operatorname{rot} \boldsymbol{f}}$ (Tourbillons convectés par l'écoulement)

Ecoulement uniforme

$$p = -\operatorname{div} \boldsymbol{u} \quad \text{(pression acoustique)}$$
$$\psi = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \quad \text{(tourbillons)}$$

- Acoustique :

$$\boxed{\mathrm{D}^2 p - \Delta p = -\operatorname{div} \boldsymbol{f} \quad (\Omega), \qquad \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad (\partial\Omega)}$$

(Equation de Helmholtz convectée)

- Hydrodynamique :

$\boxed{\mathrm{D}^2 \psi = \operatorname{rot} \boldsymbol{f}}$ (Tourbillons convectés par l'écoulement)

$$-k^2 \psi - 2ikM \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = \operatorname{rot} \boldsymbol{f}$$

(Equation Différentielle Ordinaire en x_1)

Ecoulement uniforme

$$p = -\operatorname{div} \boldsymbol{u} \quad \text{(pression acoustique)}$$
$$\psi = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \quad \text{(tourbillons)}$$

- Acoustique :

$$\boxed{\mathrm{D}^2 p - \Delta p = -\operatorname{div} \boldsymbol{f} \quad (\Omega), \qquad \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad (\partial\Omega)}$$

(Equation de Helmholtz convectée)

- Hydrodynamique :

$\boxed{\mathrm{D}^2 \psi = \operatorname{rot} \boldsymbol{f}}$ (Tourbillons convectés par l'écoulement)

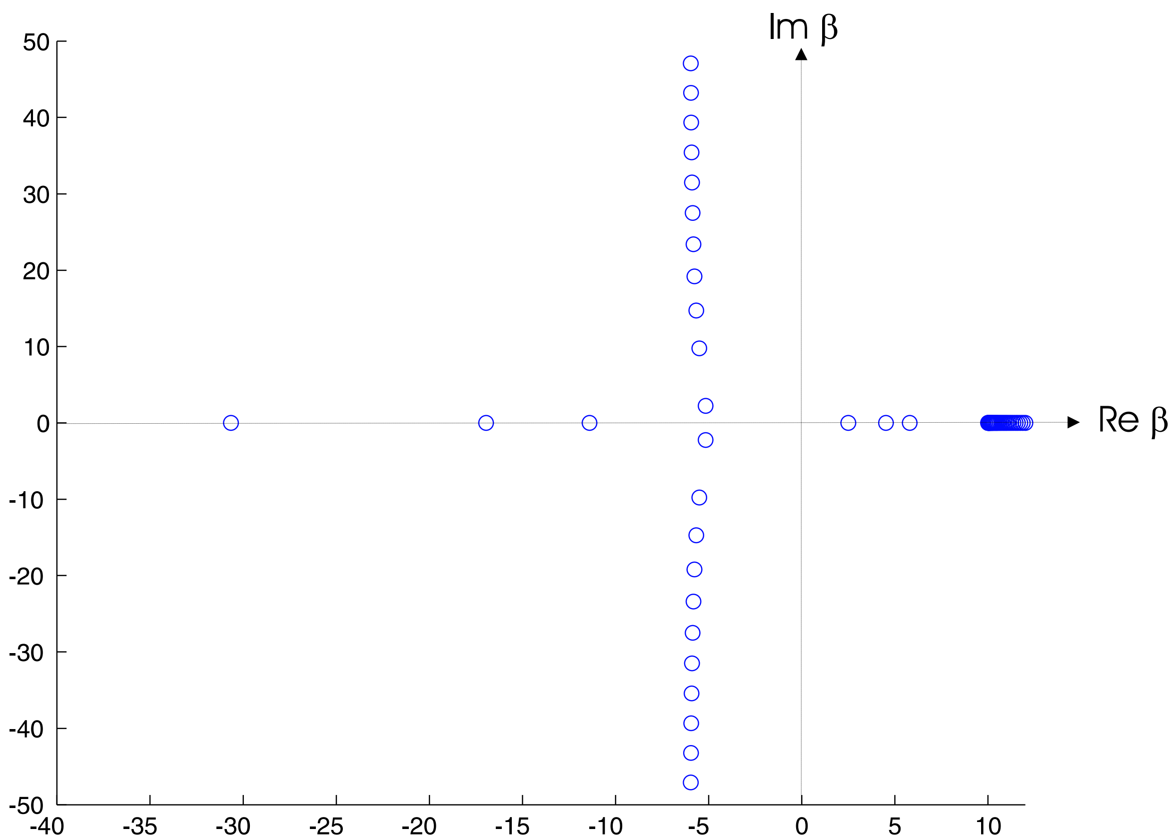
Conditions de rayonnement :

- ▷ Conditions “usuelles” pour p
- ▷ ψ nul à l'amont de la source

Modes et conditions de rayonnement

Exemple : $M(x_2) = 0.2 + 0.6x_2$, $\quad l = 1$ et $k = 8$

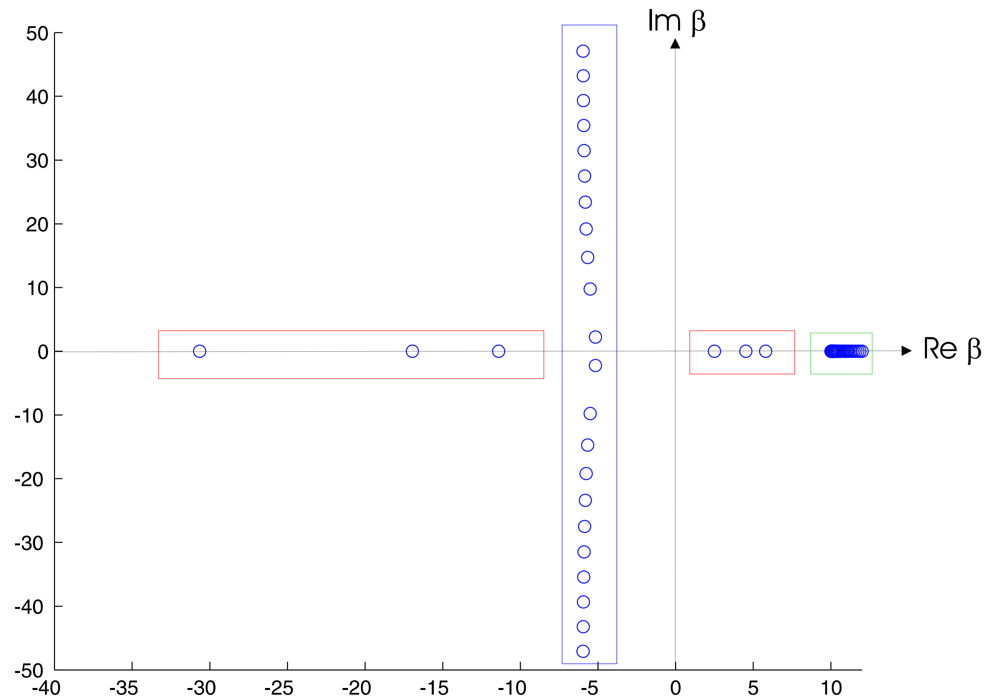
$$\boxed{\boldsymbol{u}(x_1, x_2) = \boldsymbol{v}(x_2)e^{i\beta x_1}}$$



Modes et conditions de rayonnement

Exemple : $M(x_2) = 0.2 + 0.6x_2$, $l = 1$ et $k = 8$

$$\boxed{\boldsymbol{u}(x_1, x_2) = \boldsymbol{v}(x_2)e^{i\beta x_1}}$$



Modes “acoustiques”

- Modes propagatifs
- Modes évanescents

Modes “hydrodynamiques”
(continuum) $k - M(x_2)\beta = 0$

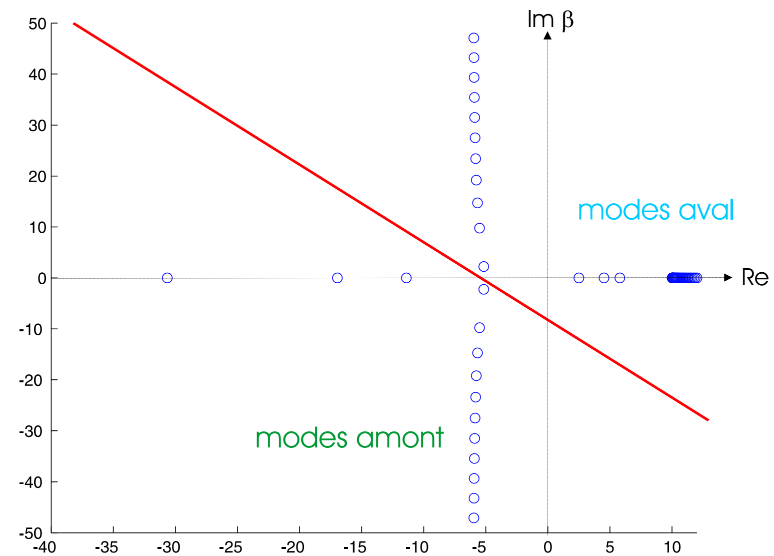
Modes et conditions de rayonnement

Exemple : $M(x_2) = 0.2 + 0.6x_2, \quad l = 1$ et $k = 8$

$$\boxed{\boldsymbol{u}(x_1, x_2) = \boldsymbol{v}(x_2) e^{i\beta x_1}}$$

mode aval : β réel, $\dfrac{\partial \omega}{\partial \beta}$>0 ou $\Im m(\beta) > 0$.

mode amont : β réel, $\dfrac{\partial \omega}{\partial \beta}$<0 ou $\Im m(\beta) < 0$.



La solution $\boldsymbol{u}$ du problème de rayonnement est sortante si :

$\boldsymbol{u}$ se décompose à l'amont (resp. aval) sur les modes amont (resp. aval) modes (B. Nilsson).

Objectif

- Calculer une approximation de la solution sortante $\boldsymbol{u}$ de

$$\begin{cases} \mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right) = \boldsymbol{f} & (\Omega) \\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 & (\partial\Omega) \end{cases}$$

en utilisant des Eléments Finis et des PML.

Objectif

- Calculer une approximation de la solution sortante $\boldsymbol{u}$ de

$$\begin{cases} \mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right) = \boldsymbol{f} & (\Omega) \\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 & (\partial\Omega) \end{cases}$$

en utilisant des Eléments Finis et des PML.

- Un calcul direct ne marche pas pour (au moins) 2 raisons:
  - Les Eléments Finis ne convergent pas (défaut de coercivité et de compacité)
  - Les PML ne convergent pas ($\sim$ hydrodynamique)

Objectif

- Calculer une approximation de la solution sortante $\boldsymbol{u}$ de

$$\begin{cases} \mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}\,(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f} & (\Omega) \\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 & (\partial\Omega) \end{cases}$$

en utilisant des Eléments Finis et des PML.

- Un calcul direct ne marche pas pour (au moins) 2 raisons:
  - Les Eléments Finis ne convergent pas (défaut de coercivité et de compacité)
  - Les PML ne convergent pas ($\sim$ hydrodynamique)

Un remède : la "régularisation" ($\sim$ Maxwell)

2 - La régularisation

La régularisation (cas sans écoulement)

Galbrun: $-\boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}) - k^2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ (~ Maxwell)

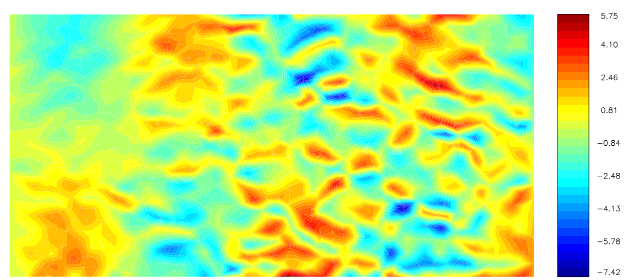
La régularisation (cas sans écoulement)

Galbrun: $-\boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) - k^2\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ (∼ Maxwell)

Défaut de compacité (même dans un domaine borné Ω_b):

$$\int_{\Omega_b} \operatorname{div}\boldsymbol{u}\,\operatorname{div}\bar{\boldsymbol{v}} - k^2\int_{\Omega_b}\boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{v}} = \ldots$$

$\Rightarrow$ Eléments Finis de Lagrange F. E. sont instables



La régularisation (cas sans écoulement)

Galbrun: $-\boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}) - k^2\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ (∼ Maxwell)

2 remèdes:

- Eléments conformes dans H_{div} Raviart-Thomas, Nédélec, Monk ...
- Régularisation Werner, Costabel et Dauge, Hazard, Ciarlet Jr. ...

La régularisation (cas sans écoulement)

Galbrun: $-\boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) - k^2\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ (∼ Maxwell)

2 remèdes:

- Eléments conformes dans H_{div} Raviart-Thomas, Nédélec, Monk ...
- Régularisation Werner, Costabel et Dauge, Hazard, Ciarlet Jr. ...

L'idée : rot (Galbrun) $\Rightarrow \operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \frac{-1}{k^2}\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = \psi_f$

Equation régularisée : $s > 0$

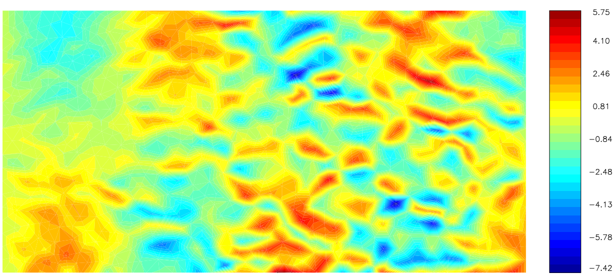
$$\underbrace{-\boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) + s\,\mathbf{rot}\,(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}}_{\text{coercif dans } H^1} - \underbrace{\psi_f}_{\text{source}}) - \underbrace{k^2\boldsymbol{u}}_{\text{compact}} = \boldsymbol{f}$$

La régularisation (cas sans écoulement)

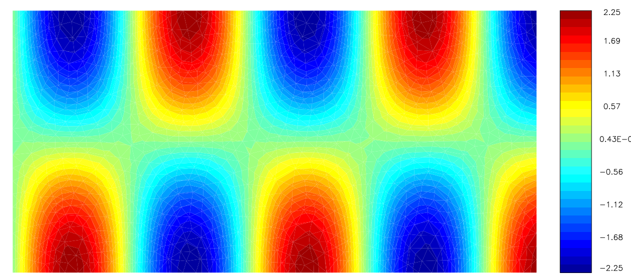
Galbrun: $-\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{u}) - k^2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ (∼ Maxwell)

2 remèdes:

- Eléments conformes dans H_{div} Raviart-Thomas, Nédélec, Monk ...
- Régularisation Werner, Costabel et Dauge, Hazard, Ciarlet Jr. ...



Partie réelle de $\boldsymbol{u}_1$, pas de régularisation



Partie réelle de $\boldsymbol{u}_1$, avec régularisation

Tous les résultats numériques sont obtenus avec le code Eléments Finis MELINA (D. Martin)

La régularisation (cas avec écoulement)

Galbrun : $\mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ où $\mathrm{D} = -ik + M(x_2)\,\frac{\partial}{\partial x_1}$

La régularisation (cas avec écoulement)

Galbrun : $\mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ où $\mathrm{D} = -ik + M(x_2)\,\frac{\partial}{\partial x_1}$

Il n'y a pas de cadre fonctionnel naturel (même dans un domaine borné Ω_b):

$$\int_{\Omega_b} \underbrace{\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\bar{\boldsymbol{v}} - M(x_2)^2\partial_1\boldsymbol{u}\partial_1\bar{\boldsymbol{v}}}_{\text{pas de signe si } M(x_2)\neq 0} - \underbrace{2ikM(x_2)\partial_1\boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{v}} - k^2\boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{v}}}_{\substack{\text{pas de compacité} \\ \text{même si } M(x_2)=0}} = \ldots$$

donc pas d'éléments conformes connus... 

La régularisation (cas avec écoulement)

Galbrun : $\mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ où $\mathrm{D} = -ik + M(x_2)\,\frac{\partial}{\partial x_1}$

Il n'y a pas d'éléments conformes connus...

Mais la régularisation fonctionne car :

$$\int_{\Omega_b} \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\bar{\boldsymbol{v}} - M(x_2)^2\partial_1\boldsymbol{u}\,\partial_1\bar{\boldsymbol{v}} + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}\,\mathrm{rot}\,\bar{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{u}\,\bar{\boldsymbol{v}}$$

est coercive dans l'espace

$$\left\{\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega_b)^2;\ \boldsymbol{v}.\boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_b\right\}$$

La régularisation (cas avec écoulement)

Galbrun : $\mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ où $\mathrm{D} = -ik + M(x_2)\,\frac{\partial}{\partial x_1}$

Il n'y a pas de cadre fonctionnel naturel...

- Pas d'éléments conformes connus...
- Mais la régularisation fonctionne

La régularisation (cas avec écoulement)

Galbrun : $\mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ où $\mathrm{D} = -ik + M(x_2)\,\frac{\partial}{\partial x_1}$

On introduit l'inconnue supplémentaire : $\psi = \operatorname{rot}\boldsymbol{u}$

La régularisation (cas avec écoulement)

Galbrun : $\mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ où $\mathrm{D} = -ik + M(x_2)\,\frac{\partial}{\partial x_1}$

On introduit l'inconnue supplémentaire : $\psi = \operatorname{rot}\boldsymbol{u}$

Equation régularisée en $\boldsymbol{u}$:

$$\mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) + \overbrace{s\,\mathbf{rot}\,(\operatorname{rot}\boldsymbol{u} - \psi)}^{\text{Terme de régularisation}} = \boldsymbol{f}$$

La régularisation (cas avec écoulement)

Galbrun : $\mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ où $\mathrm{D} = -ik + M(x_2)\,\frac{\partial}{\partial x_1}$

On introduit l'inconnue supplémentaire : $\psi = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$

Equation régularisée en $\boldsymbol{u}$:

$$\boxed{\mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}) + s\,\mathbf{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} - \psi) = \boldsymbol{f} \quad (\Omega)}$$

Equation en ψ : rot (Galbrun) : $\mathrm{rot}\,(\mathrm{D}^2\boldsymbol{u}) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f} \Rightarrow$

La régularisation (cas avec écoulement)

Galbrun : $\mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ où $\mathrm{D} = -ik + M(x_2)\,\frac{\partial}{\partial x_1}$

On introduit l'inconnue supplémentaire : $\psi = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$

Equation régularisée en $\boldsymbol{u}$:

$$\boxed{\mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}) + s\,\mathbf{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} - \psi) = \boldsymbol{f} \quad (\Omega)}$$

Equation en ψ : rot (Galbrun) : $\mathrm{rot}\,(\mathrm{D}^2\boldsymbol{u}) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f} \Rightarrow$

$$\boxed{\mathrm{D}^2\psi - 2M'\mathrm{D}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f} \quad (\Omega)}$$

La régularisation (cas avec écoulement)

Equation régularisée en $\boldsymbol{u}$:

$$\boxed{\mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) + s\,\mathbf{rot}\,(\operatorname{rot}\boldsymbol{u} - \psi) = \boldsymbol{f} \quad (\Omega)}$$

Equation en ψ :

$$\boxed{\mathrm{D}^2\psi - 2M'\mathrm{D}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = \operatorname{rot}\boldsymbol{f} \quad (\Omega)}$$

La régularisation (cas avec écoulement)

Equation régularisée en $\boldsymbol{u}$:

$$\boxed{\mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) + s\,\mathbf{rot}\,(\operatorname{rot}\boldsymbol{u} - \psi) = \boldsymbol{f} \quad (\Omega)}$$

Equation en ψ :

$$\boxed{\mathrm{D}^2\psi - 2M'\mathrm{D}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = \operatorname{rot}\boldsymbol{f} \quad (\Omega)}$$

Conditions aux limites :

$$\boxed{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{u} - \psi = 0 \quad (\partial\Omega)}$$

Conditions de rayonnement : ???

3 - Résoudre le problème dans un conduit infini

Le cas dissipatif

On introduit de la dissipation: $k_\varepsilon = k + i\varepsilon \qquad \varepsilon > 0$

Le cas dissipatif

On introduit de la dissipation: $k_\varepsilon = k + i\varepsilon \qquad \varepsilon > 0$

On cherche $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in H^1(\Omega)^2$ et $\psi_\varepsilon \in L^2(\Omega)$

Le cas dissipatif

On introduit de la dissipation: $k_\varepsilon = k + i\varepsilon \qquad \varepsilon > 0$

On cherche $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in H^1(\Omega)^2$ et $\psi_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ solutions de :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{D}_\varepsilon^2 \boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_\varepsilon) + s\, \mathbf{rot}\, (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\varepsilon - \psi_\varepsilon) = \boldsymbol{f} \quad (\Omega) \\[2ex] \mathrm{D}_\varepsilon^2 \psi_\varepsilon - 2M'(x_2)\mathrm{D}_\varepsilon \left(\dfrac{\partial u_{\varepsilon,1}}{\partial x_1} \right) = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} \quad (\Omega) \\[2ex] \boldsymbol{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\varepsilon - \psi_\varepsilon = 0 \quad (\partial\Omega) \end{array}}$$

où

$$\mathrm{D}_\varepsilon = -ik_\varepsilon + M(x_2) \frac{\partial}{\partial x_1}$$

Le cas dissipatif (suite)

Si M ne s'annule pas, on peut résoudre explicitement l'équation suivante dans $L^2(\Omega)$:

$$\left(-ik_\varepsilon + M(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 \psi_\varepsilon = \underbrace{2M'(x_2)\mathrm{D}\left(\frac{\partial u_{\varepsilon,1}}{\partial x_1}\right) + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}}_{g_\varepsilon}$$

pour g_ε donné :

$$\psi_\varepsilon = G_\varepsilon \overset{x_1}{*} g_\varepsilon + \underbrace{\cancel{(a(x_2) + b(x_2)x_1)e^{i\frac{k_\varepsilon}{M}x_1}}}_{\text{(croit expt en } x_1 \to -\infty)}$$

avec $G_\varepsilon(x_1) = H(x_1)\frac{x_1}{M^2}\, e^{i\frac{k_\varepsilon}{M}x_1}$ (fonction de Green causale).

Le cas dissipatif (suite)

- En particulier, si $M'(x_2) = 0$ (écoulement uniforme) :

$$\psi_\varepsilon = G_\varepsilon \overset{x_1}{*} \operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \psi_{f,\varepsilon}$$

$\psi_{f,\varepsilon}$ est nul en amont de la source, les tourbillons sont créés par la source et convectés par l'écoulement.

Le cas dissipatif (suite)

- En particulier, si $M'(x_2) = 0$ (écoulement uniforme) :

$$\psi_\varepsilon = G_\varepsilon \overset{x_1}{*} \operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \psi_{f,\varepsilon}$$

$\psi_{f,\varepsilon}$ est nul en amont de la source, les tourbillons sont créés par la source et convectés par l'écoulement.

- En général

$$\psi_\varepsilon = \boldsymbol{A}_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon + \psi_{f,\varepsilon}$$

où $\boldsymbol{A}_\varepsilon \boldsymbol{u}(x_1, x_2) = \dfrac{2M'(x_2)}{M(x_2)} \displaystyle\int_{-\infty}^{x_1} e^{i\frac{k_\varepsilon}{M(x_2)}(x_1 - z)} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(z, x_2)\, dx_1$

$\boldsymbol{A}_\varepsilon$ est un opérateur d'ordre 0 (continu de L^2 dans L^2).

Le cas dissipatif (fin)

Finalement, on cherche $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in H^1(\Omega)^2$ solution de :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{D}_\varepsilon^2 \boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_\varepsilon) + s\, \mathbf{rot}\, (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{A}_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon) = \boldsymbol{f} + \mathbf{rot}\, \psi_{f,\varepsilon} \quad (\Omega) \\ \\ \boldsymbol{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{A}_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon = \psi_{f,\varepsilon} \quad (\partial\Omega) \end{array}}$$

Le cas dissipatif (fin)

Finalement, on cherche $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in H^1(\Omega)^2$ solution de :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{D}_\varepsilon^2 \boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon) + s\, \mathbf{rot}\, (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{A}_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon) = \boldsymbol{f} + \mathbf{rot}\, \psi_{f,\varepsilon} \quad (\Omega) \\[2em] \boldsymbol{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{A}_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon = \psi_{f,\varepsilon} \quad (\partial\Omega) \end{array}}$$

Si $s > \sup_{x_2} M^2(x_2)$, ce problème est bien posé (Théorème de Lax-Milgram) pour ε assez grand.

Le cas dissipatif (fin)

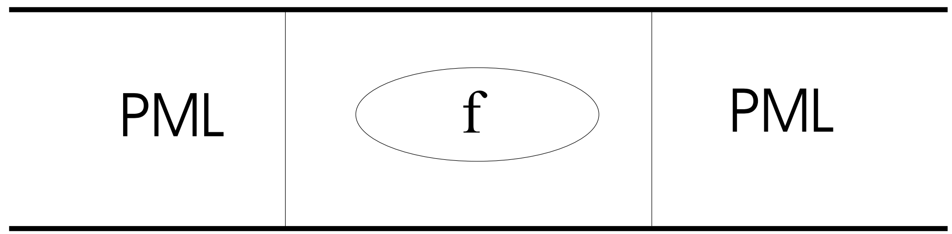
Finalement, on cherche $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in H^1(\Omega)^2$ solution de :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{D}_\varepsilon^2 \boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon) + s \,\mathbf{rot}\,(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{A}_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon) = \boldsymbol{f} + \mathbf{rot}\,\psi_{f,\varepsilon} \quad (\Omega) \\[2em] \boldsymbol{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{A}_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon = \psi_{f,\varepsilon} \quad (\partial\Omega) \end{array}}$$

Si $s > \sup_{x_2} M^2(x_2)$, ce problème est bien posé (Théorème de Lax-Milgram) pour ε assez grand.

- Si l'écoulement est uniforme, le problème est bien posé $\forall \varepsilon > 0$ et la solution admet une limite quand $\varepsilon \to 0$.
- Sinon, la difficulté vient des instabilités hydrodynamiques.

Le problème avec PML (1)



Modèle de PML :

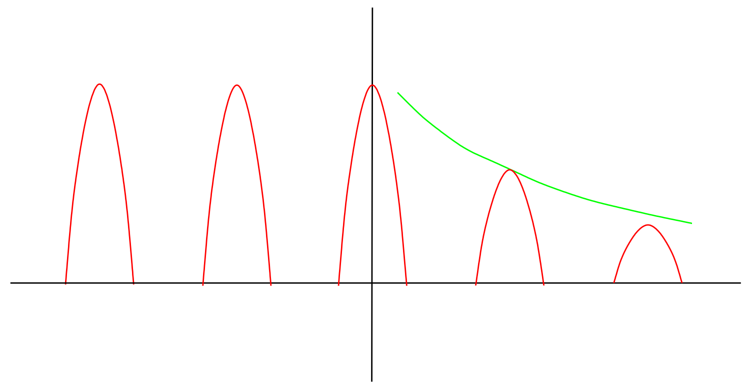
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_1} \longrightarrow \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad \alpha \in \mathbb{C}}$$

avec

$$\boxed{\mathrm{Re}(\alpha) > 0, \ \mathrm{Im}(\alpha) < 0}$$

Le problème avec PML (1)

Analyse de transmission/réflexion à l'interface $(x_1 = 0)$



Dans le domaine physique :

$\boldsymbol{u}_{inc} = e^{i\beta x_1}\,\boldsymbol{v}(x_2)$ avec $\beta > 0$

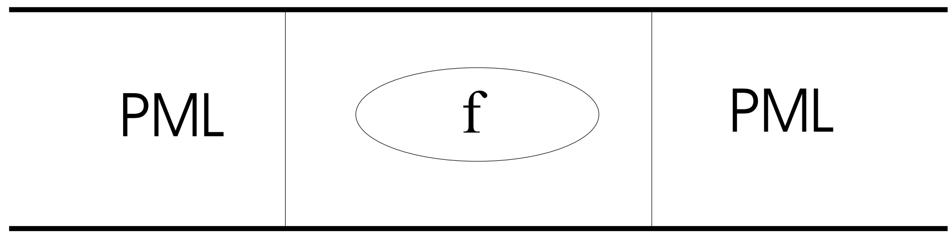
Dans la couche PML :

$\boldsymbol{u}_{trans} = e^{i\frac{\beta}{\alpha}x_1}\,\boldsymbol{v}(x_2)$

1 Pas de réflexion aux interfaces.

2 La couche absorbe le mode car $\mathrm{Im}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) > 0$.

Le problème avec PML (1)



Modèle de PML :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_1} \longrightarrow \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad \alpha \in \mathbb{C}}$$

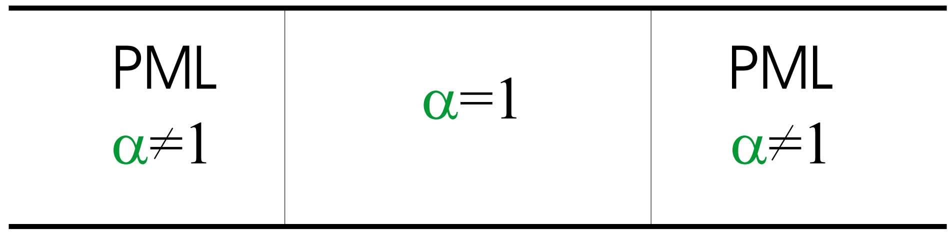
avec

$$\boxed{\mathrm{Re}(\alpha) > 0,\ \mathrm{Im}(\alpha) < 0}$$

Pour l'aéroacoustique transitoire, les PML sont INSTABLES (Hu (1996), Goodrich & Hagstrom (1997), Tam, Auriault & Cambuli (1998)) !

Mais pas en régime harmonique (É. Bécache, A.-S. Bonnet-Ben Dhia & G. Legendre, *Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation*, SIAM J. Numer. Anal.)

Le problème avec PML (2)



Le problème avec PML (2)

PML $\alpha \neq 1$	$\alpha = 1$	PML $\alpha \neq 1$

On cherche $\boldsymbol{u}_\alpha \in L^2(\Omega)^2$ and $\psi_\alpha \in L^2(\Omega)$ solutions de :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{D}_\alpha^2 \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}_\alpha(\mathrm{div}_\alpha\, \boldsymbol{u}) + s\, \mathbf{rot}_{\,\alpha}(\mathrm{rot}_{\,\alpha} \boldsymbol{u} - \psi) = \boldsymbol{f} \quad (\Omega) \\[2ex] \mathrm{D}_\alpha^2 \psi - 2M' \mathrm{D}_\alpha \left(\alpha \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \mathrm{rot}_{\,\alpha} \boldsymbol{f} \quad (\Omega) \\[2ex] \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}_{\,\alpha} \boldsymbol{u} - \psi = 0 \quad (\partial\Omega) \end{array}}$$

où $\mathrm{D}_\alpha = -ik + M\, \alpha \dfrac{\partial}{\partial x_1}$

Le problème avec PML (3)

Si M ne s'annule pas, on peut résoudre explicitement l'équation en ψ dans $L^2(\Omega)$:

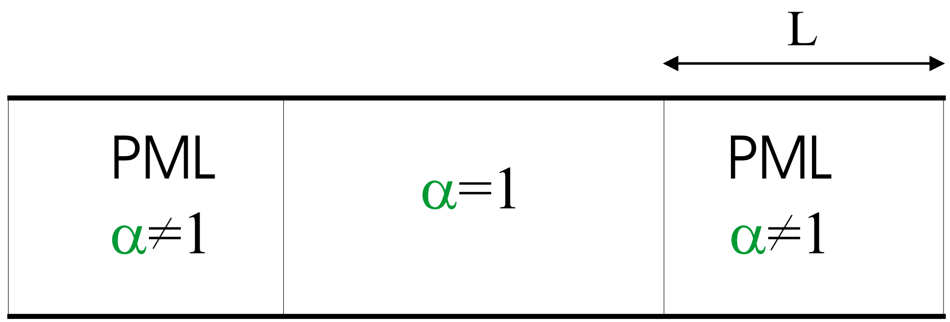
$$\psi = \boldsymbol{A}_\alpha \boldsymbol{u} + \psi_f$$

où $\boldsymbol{A}_\alpha$ est un opérateur de convolution construit avec la fonction de Green causale G_α.

En pratique, on tronque les couches PML et on résout le problème suivant :

PML pour l'équation de Galbrun (fin)

Le domaine de calcul Ω_L :

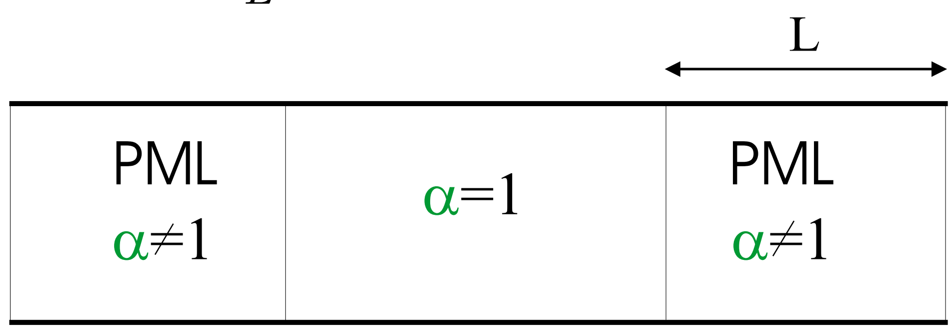


On cherche $\boldsymbol{u}_L$ et ψ_L solutions de :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{D}_\alpha^2 \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}_\alpha(\mathrm{div}_\alpha\, \boldsymbol{u}) + s\, \mathbf{rot}\,_\alpha(\mathrm{rot}\,_\alpha \boldsymbol{u} - \psi) = \boldsymbol{f} \quad (\Omega_L) \\[2em] \psi = \boldsymbol{A}_\alpha \boldsymbol{u} + \psi_f \quad (\Omega_L) \\[2em] \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}\,_\alpha \boldsymbol{u} - \psi = 0 \quad (\partial\Omega_L) \end{array}}$$

PML pour l'équation de Galbrun (fin)

Le domaine de calcul Ω_L :



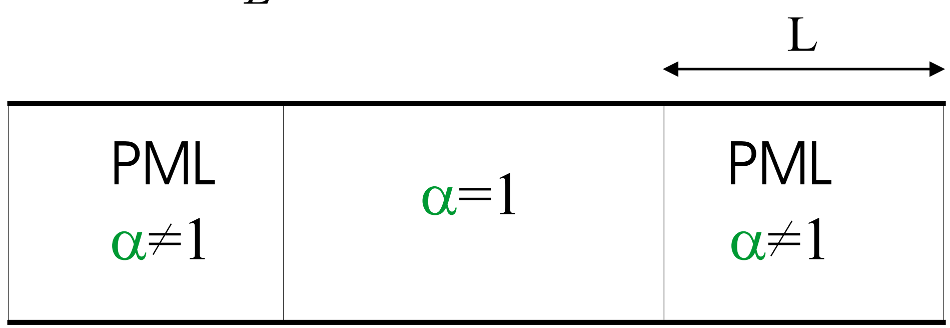
On cherche $\boldsymbol{u}_L$ et ψ_L solutions de :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{D}_\alpha^2 \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}_\alpha(\mathrm{div}_\alpha\, \boldsymbol{u}) + s\, \mathbf{rot}\,_\alpha(\mathrm{rot}\,_\alpha \boldsymbol{u} - \psi) = \boldsymbol{f} \quad (\Omega_L) \\[2em] \psi = \boldsymbol{A}_\alpha \boldsymbol{u} + \psi_f \quad (\Omega_L) \\[2em] \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}\,_\alpha \boldsymbol{u} - \psi = 0 \quad (\partial\Omega_L) \end{array}}$$

On utilise un algorithme itératif :

PML pour l'équation de Galbrun (fin)

Le domaine de calcul Ω_L :



On utilise un algorithme itératif :

$$\mathrm{D}_\alpha^2 \boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{\nabla}_\alpha(\mathrm{div}_\alpha\, \boldsymbol{u}^{n+1}) + s\, \mathbf{rot}_\alpha(\mathrm{rot}_\alpha \boldsymbol{u}^{n+1} - \psi^n) = \boldsymbol{f} \quad (\Omega_L)$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}_\alpha \boldsymbol{u}^{n+1} - \psi^n = 0 \quad (\partial\Omega_L)$$

$$\psi^{n+1} = \boldsymbol{A}_\alpha \boldsymbol{u}^{n+1} + \psi_f \quad (\Omega_L)$$

Convergence

- Le problème en $(\boldsymbol{u}_L, \psi_L)$ est de type Fredholm $\Rightarrow$ Eléments Finis convergent.
- L'algorithme itératif converge si M' n'est pas trop grand....
- Dans le cas d'un écoulement uniforme, on a montré que le modèle PML converge exponentiellement :

$$\boxed{\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_L\|_{H^1} \leq C\, e^{-\eta \frac{L}{|\alpha|}}}$$

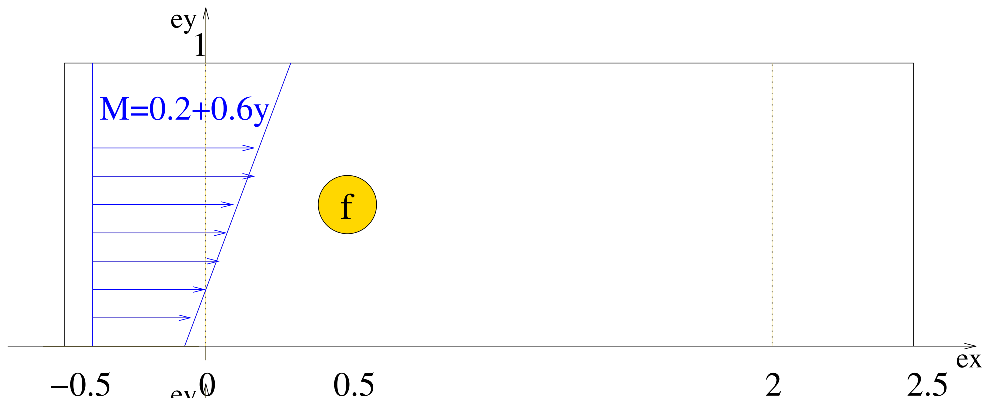
avec $\eta = \eta(k, M, \text{ Arg } (1/\alpha), ...) > 0$.

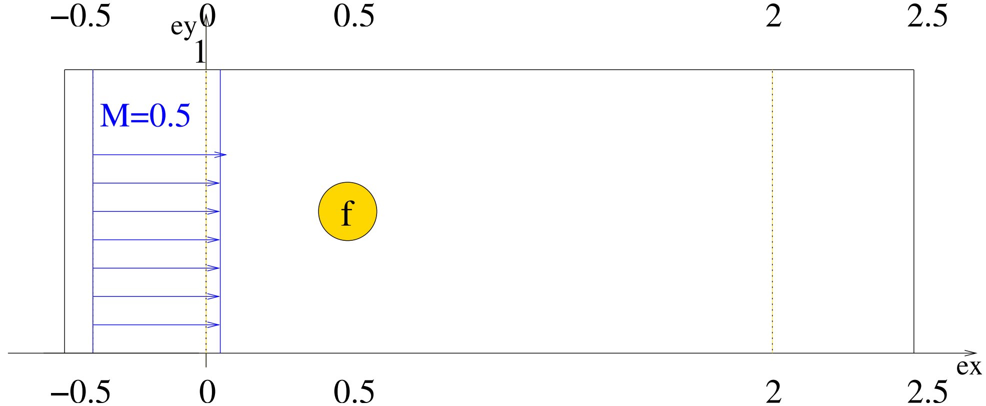
É. Bécache, A.-S. Bonnet-Ben Dhia & G. Legendre, *Perfectly matched layers for time-harmonic acoustics in the presence of a uniform flow*, SIAM J. Numer. Anal.

Rayonnement acoustique

Paramètres des simulations :

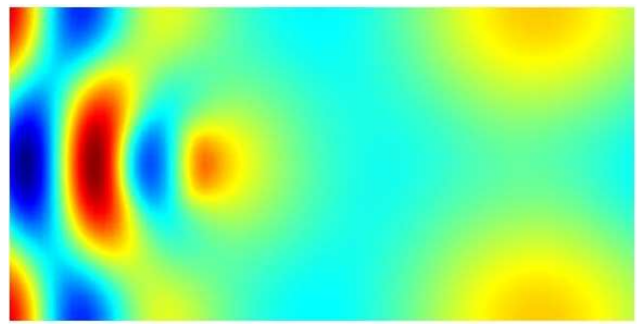
- Rayon du support de la source $R = 0.1$
- $s = 1$, $\alpha : 0.5 - 0.5i$
- Eléments Q2, $h = 0.05$
- Nombre d'onde : $k = 8$



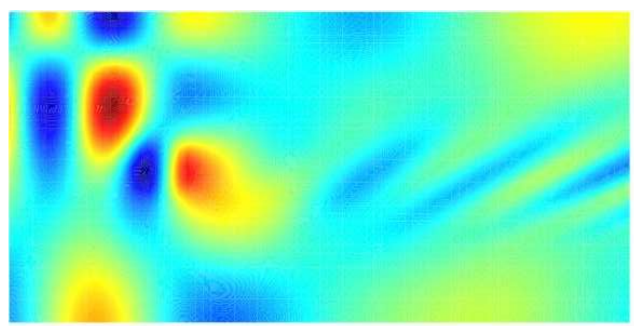


Source irrotationnelle

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{f} = 0 : \quad \boldsymbol{f} = r\, 1_{B_R}\, \boldsymbol{e_r}$$

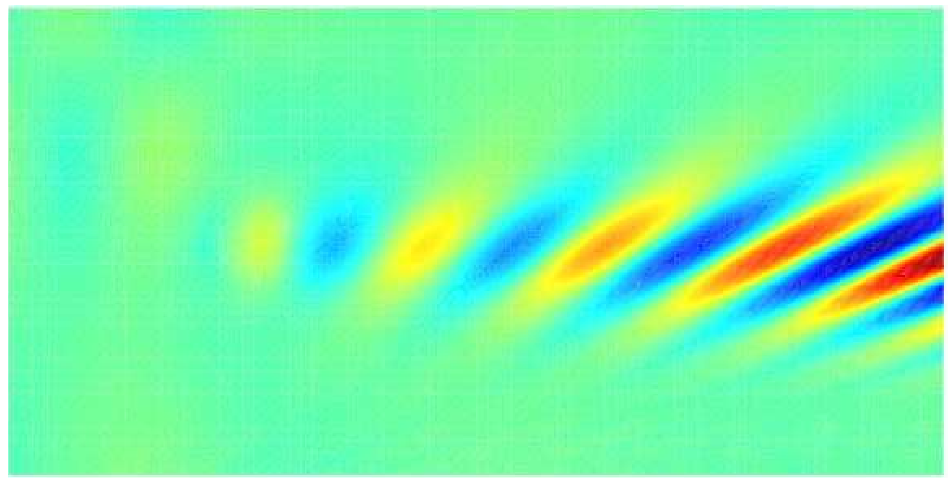


Partie réelle de u_1, écoulement uniforme



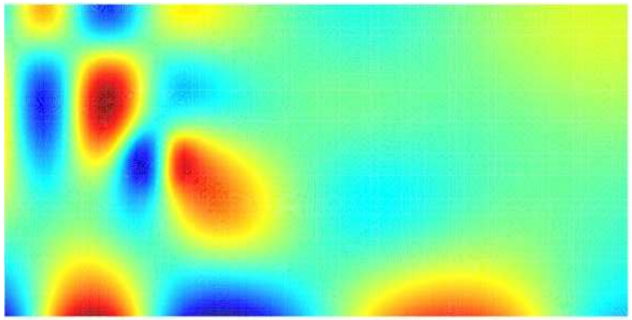
Partie réelle de u_1, écoulement cisaillé

Source irrotationnelle

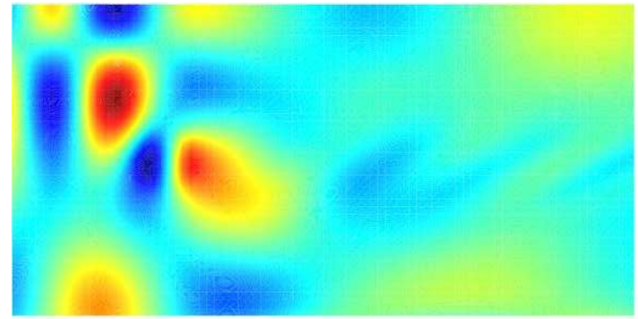


Vorticité pour l'écoulement cisaillé

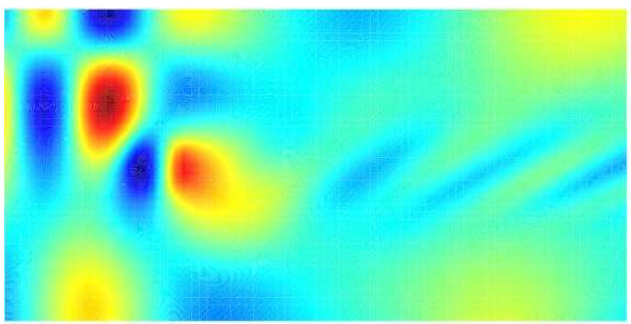
Source irrotationnelle



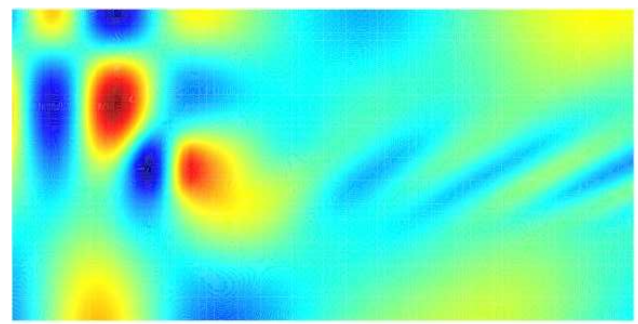
Itération 1



Itération 2



Itération 3



Itération 4

Partie réelle de u_1 obtenue lors des quatre premières itérations.

4 - Un nouveau modèle pour les Mach faibles

Inconvénients de la méthode

A chaque itération, on doit évaluer ψ :

$$\frac{2M'(x_2)}{M^2(x_2)} \int_a^{x_1} e^{i\frac{k}{M(x_2)}(x_1-z)} u_1(z,x_2)\,dx_1$$

- Intégrale très oscillante si M petit et/ou k “grand”.
- Implémentation délicate en maillage non structuré.
- Divergence de l’algorithme si M' “grand” et/ou M petit.

Le nouveau modèle

L'idée ($\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f} = 0$) :

- Conserver l'équation exacte pour $\boldsymbol{u}$:

$$\boxed{\mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}) + s\,\mathbf{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} - \psi) = \boldsymbol{f} \quad (\Omega)}$$

- Utiliser une approximation de ψ à faible Mach.

Le nouveau modèle

L'idée ($\mathbf{rot}\, \boldsymbol{f} = 0$) :

- Conserver l'équation exacte pour $\boldsymbol{u}$:

$$\boxed{\mathrm{D}^2 \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}) + s\, \mathbf{rot}\,(\operatorname{rot} \boldsymbol{u} - \psi) = \boldsymbol{f} \quad (\Omega)}$$

- Utiliser une approximation de ψ à faible Mach.

Dans l'équation :

$$\boxed{\mathrm{D}^2 \psi - 2M'\mathrm{D}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = 0 \quad (\Omega)}$$

on fait l'approximation :

$$D = -ik + M\partial_1 \sim -ik.$$

Le nouveau modèle

L'idée ($\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f} = 0$) :

- Conserver l'équation exacte pour $\boldsymbol{u}$:

$$\boxed{\mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}) + s\,\mathbf{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} - \psi) = \boldsymbol{f} \quad (\Omega)}$$

- Utiliser une approximation de ψ à faible Mach.

On obtient :

$$\boxed{\psi = \frac{2iM'}{k}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}$$

Le nouveau modèle (suite)

Le modèle exact :

$$\boxed{\psi = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}}$$

$\boldsymbol{A}$ *est un opérateur*

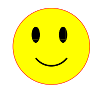
 *de convolution (non local)*

 *d'ordre 0*

Le modèle faible Mach :

$$\boxed{\psi = \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{u}}$$

$\tilde{\boldsymbol{A}}$ *est un opérateur*

 *différentiel (local)*

 *d'ordre 1*

Le nouveau modèle (suite)

Le modèle exact :

$$\boxed{\psi = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}}$$

$\boldsymbol{A}$ *est un opérateur*

- *de convolution (non local)*
- *d'ordre 0*

Le modèle faible Mach :

$$\boxed{\psi = \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{u}}$$

$\tilde{\boldsymbol{A}}$ *est un opérateur*

- *différentiel (local)*
- *d'ordre 1*

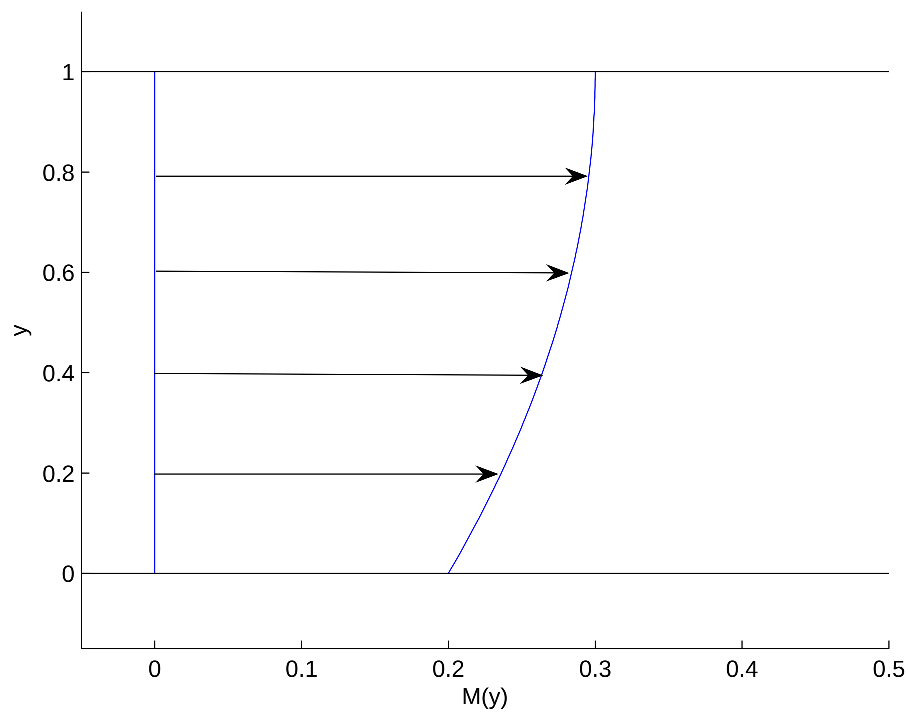
Avantages :

- Résolution directe du système linéaire.
- Généralisable à des écoulements quelconques.
- Seule l'hydrodynamique qui contribue à l'acoustique est calculée.

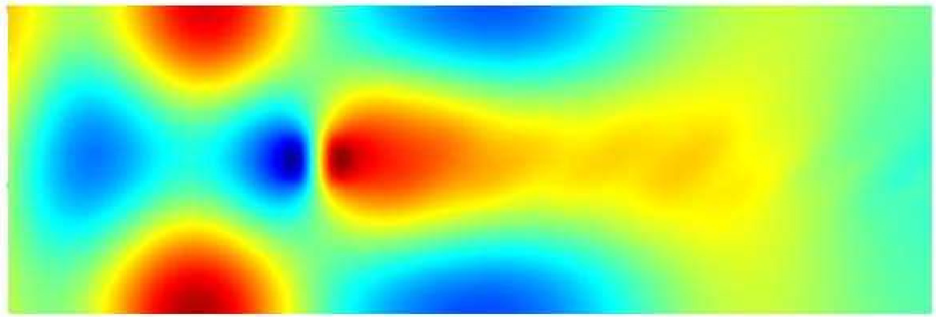
Validation numérique

Paramètres des simulations :

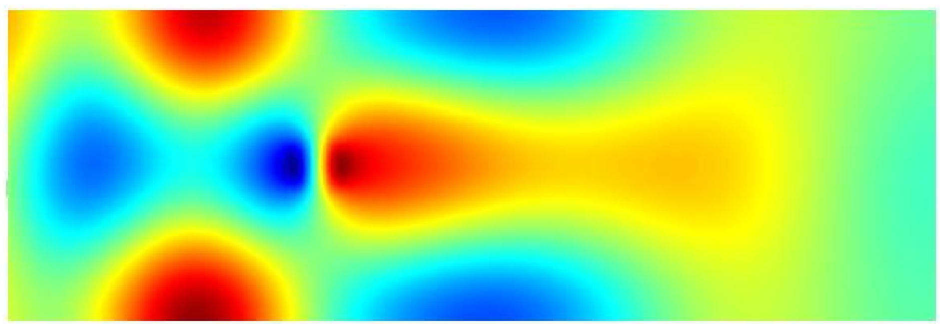
- Rayon du support de la source $R = 0.1$
- $s = 1$, α : $0.65 - 0.65i$
- Eléments Q2, $h = 0.05$
- Nombre d'onde : $k = 6$



Comparaison entre les 2 méthodes

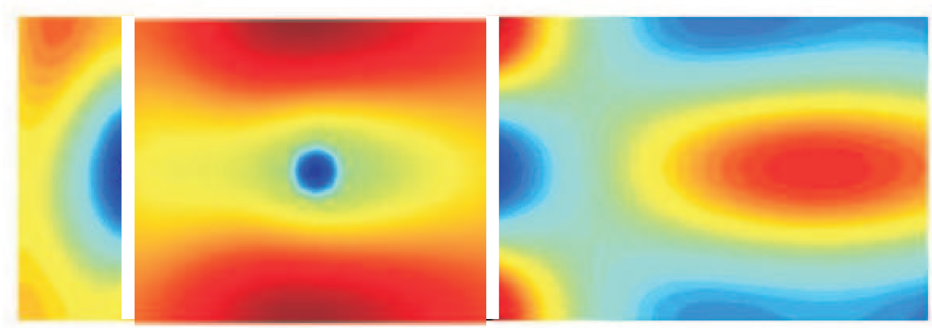


Partie réelle de u_1, modèle exact

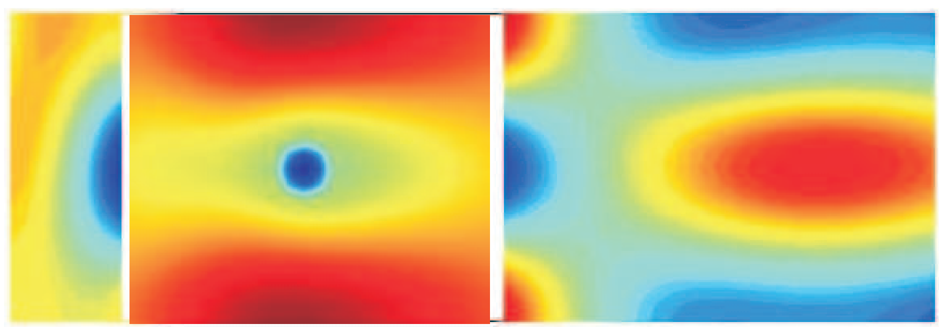


Partie réelle de u_1, modèle faible Mach

Comparaison entre les 2 méthodes

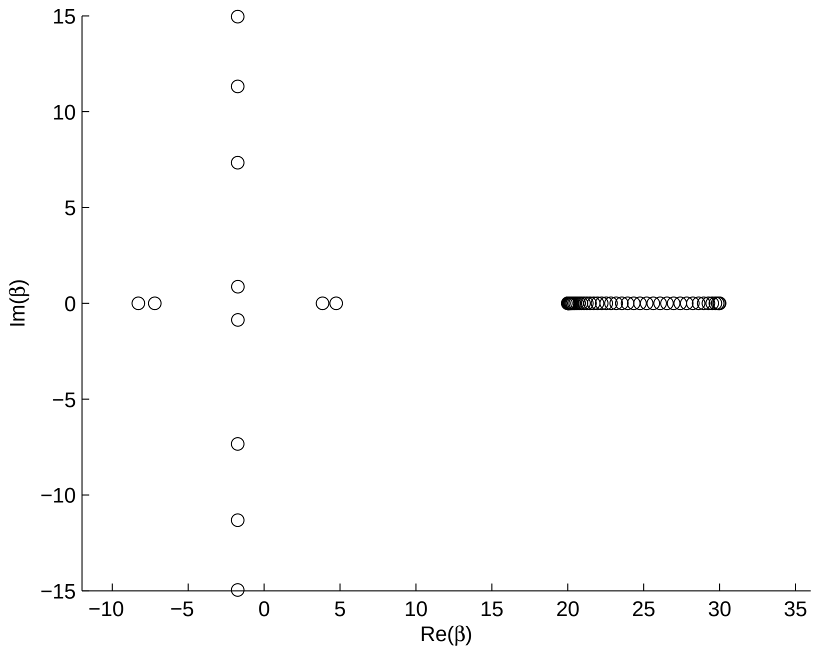


Partie réelle de la pression, modèle exact

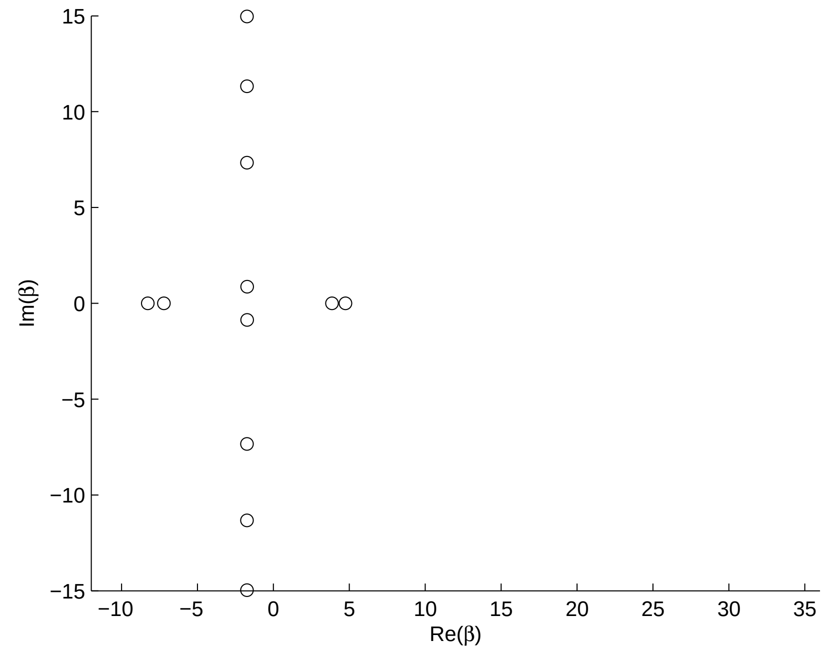


Partie réelle de la pression, modèle faible Mach

Comparaison des spectres



Modèle exact

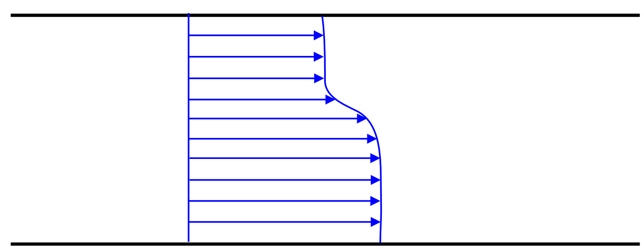


Modèle faible Mach

L'approximation faible Mach supprime le continuum des modes hydrodynamiques.

Quelques perspectives

- On envisage de nombreuses généralisations à l'aide du modèle faible Mach : *3D, écoulement non parallèle etc...*
- Il reste beaucoup de mathématiques à faire.... : *absorption limite, convergence des PML pour un écoulement non uniforme, analyse d'erreur pour le modèle faible Mach etc...*
- Peut-on appliquer la méthode "exacte" aux écoulements instables ?



- Comment traiter les singularités géométriques et les conditions d'impédance à la paroi ?