

**DISCRETISATIONS  
CONSERVATIVES ET EQUILIBREES  
POUR LES ECOULEMENTS  
EN EAUX PEU PROFONDES  
SUR DES DOMAINES EN ROTATION**

Emmanuel Audusse  
audusse@math.univ-paris13.fr

En collaboration avec  
Rupert Klein et Anthony Owinoh

Freie Universität Berlin - Potsdam Institute for Climate Research - Université Paris 13

---

# Contexte

Ecoulements en eaux peu profondes : système de Saint-Venant

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right) + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0$$

$$\left(\frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t}\right) + \nabla \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \left(\frac{gh^2}{2}\right) + \text{Termes Sources} = 0$$

$(h, \mathbf{u}, \mathbf{q} = h\mathbf{u})$  : hauteur d'eau, vitesse, quantité de mouvement ;  $g$  : gravité.

- ▲ Obtenu par analyse asymptotique de Navier-Stokes sous l'hypothèse "eau peu profonde"
  - ▲ Système hyperbolique de lois de conservation
  - ▲ Importance des termes sources
    - Topographie  $\rightsquigarrow$  Schémas *Well-balanced*
    - Friction, viscosité  $\rightsquigarrow$  modèles visqueux, multicouche, avalanche
    - Coriolis, centrifuge  $\rightsquigarrow$  météo, climat
- $\rightsquigarrow$  Problématique : Concilier les deux aspects (stabilité et précision)

# Situation et objectifs

Ecoulements en eaux peu profondes sur un domaine en rotation

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_r + \nabla_r \cdot (h\mathbf{u}) = 0$$

$$\left(\frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t}\right)_r + \nabla_r \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_r \left(\frac{gh^2}{2}\right) + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times (h\mathbf{u})}_{\text{Force de Coriolis}} + h\boldsymbol{\Omega} \times \underbrace{(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}^r)}_{\text{Force Centrifuge}} = 0$$

$(h, \mathbf{u}, \mathbf{q} = h\mathbf{u})$  : hauteur d'eau, vitesse, quantité de mouvement.

$(\boldsymbol{\Omega}, g)$  : vecteur rotation, gravité.

# Situation et objectifs

Ecoulements en eaux peu profondes sur un domaine en rotation

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_r + \nabla_r \cdot (h\mathbf{u}) = 0$$

$$\left(\frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t}\right)_r + \nabla_r \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_r \cdot \left(\frac{gh^2}{2}\right) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (h\mathbf{u}) + h\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}^r) = 0$$

Quantité de mouvement *relative*

Force de Coriolis

Force Centrifuge

$(h, \mathbf{u}, \mathbf{q} = h\mathbf{u})$  : hauteur d'eau, vitesse, quantité de mouvement.

$(\boldsymbol{\Omega}, g)$  : vecteur rotation, gravité.

## Simulations en temps long

- Conservation des quantités discrètes
  - hauteur d'eau (immédiat : Volumes Finis)
  - quantité de mouvement *inertielle* (plus difficile)

# Situation et objectifs

Ecoulements en eaux peu profondes sur un domaine en rotation

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_r + \nabla_r \cdot (h\mathbf{u}) = 0$$

$$\left(\frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t}\right)_r + \nabla_r \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_r \cdot \left(\frac{gh^2}{2}\right) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (h\mathbf{u}) + h\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}^r) = 0$$

Gradient de pression

Force de Coriolis

$(h, \mathbf{u}, \mathbf{q} = h\mathbf{u})$  : hauteur d'eau, vitesse, quantité de mouvement.

$(\boldsymbol{\Omega}, g)$  : vecteur rotation, gravité.

## ▲ Simulations en temps long

- Conservation des quantités discrètes
  - hauteur d'eau (immédiat : Volumes Finis)
  - quantité de mouvement *inertielle* (plus difficile)

## ▲ Ecoulements quasi-géostrophiques

- Preservation de l'équilibre géostrophique discret

# Un schéma conservatif : forme générale

Ecoulements en eaux peu profondes sur un domaine en rotation

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_r + \nabla_r \cdot (h\mathbf{u}) = 0$$

$$\left(\frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t}\right)_r + \nabla_r \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_r \left(\frac{gh^2}{2}\right) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (h\mathbf{u}) + h\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}^r) = 0$$

# Un schéma conservatif : forme générale

Ecoulements en eaux peu profondes sur un domaine en rotation

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_r + \nabla_r \cdot (h\mathbf{u}) = 0$$

$$\left(\frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t}\right)_r + \nabla_r \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_r \left(\frac{gh^2}{2}\right) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (h\mathbf{u}) + h\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}^r) = 0$$

Forme générale d'un schéma conservant la quantité de mouvement *inertielle* discrète :  $\sum_i h_i^n \mathbf{u}_i^n + h_i^n \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i^n$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{C}o_i}^n + \mathbf{C}_{\mathbf{C}e_i}^n &= \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) \Delta t \boldsymbol{\Omega} \times (h_i^n \mathbf{u}_i^n) \\ &+ \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) \Delta t h_i^n \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i) \\ &- \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_j \left[ F_{ij}^h (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i^n) + \tilde{\mathbf{F}}_{ij} \right] \end{aligned}$$

# Un schéma conservatif : une méthode

Ecoulements en eaux peu profondes sur un domaine en rotation

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_r + \nabla_r \cdot (h\mathbf{u}) = 0$$

$$\left(\frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t}\right)_r + \nabla_r \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_r \cdot \left(\frac{gh^2}{2}\right) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (h\mathbf{u}) + h\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}^r) = 0$$

**Difficulté** : Pas accès direct à la quantité de mouvement *inertielle*



# Un schéma conservatif : une méthode

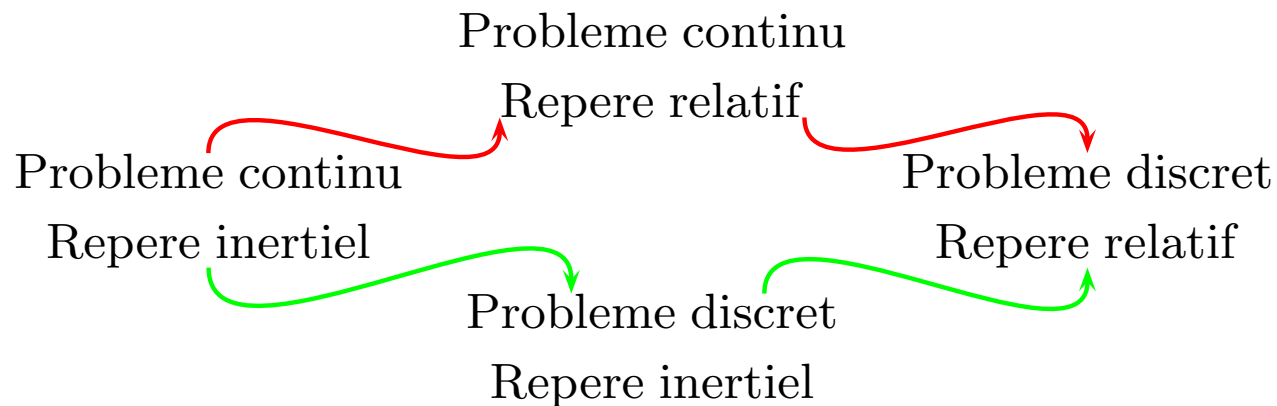
Ecoulements en eaux peu profondes sur un domaine en rotation

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_r + \nabla_r \cdot (h\mathbf{u}) = 0$$

$$\left(\frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t}\right)_r + \nabla_r \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_r \left(\frac{gh^2}{2}\right) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (h\mathbf{u}) + h\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}^r) = 0$$

**Difficulté** : Pas accès direct à la quantité de mouvement *inertielle*

**Idée** : Revenir aux équations écrites dans le repère *inertiel* !



# Discrétisation des équations inertielles

Ecoulements en eaux peu profondes sur un domaine en rotation (repère *inertiel* !)

$$\left( \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} \right)_i + \nabla_i \cdot (\hat{h} \hat{\mathbf{u}}) = 0$$

$$\left( \frac{\partial (\hat{h} \hat{\mathbf{u}})}{\partial t} \right)_i + \nabla_i \cdot (\hat{h} \hat{\mathbf{u}} \otimes \hat{\mathbf{u}}) + \nabla_i \left( \frac{g \hat{h}^2}{2} \right) = 0$$

$(\hat{h}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{q}} = \hat{h} \hat{\mathbf{u}})$  : hauteur d'eau, vitesse, quantité de mouvement (dans le repère *inertiel*)

**Intérêt** : Conservation immédiate de la quantité de mouvement *inertielle*  
(Volumes Finis)

# Discrétisation des équations inertielles

Ecoulements en eaux peu profondes sur un domaine en rotation (repère *inertiel* !)

$$\left( \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} \right)_i + \nabla_i \cdot (\hat{h} \hat{\mathbf{u}}) = 0$$

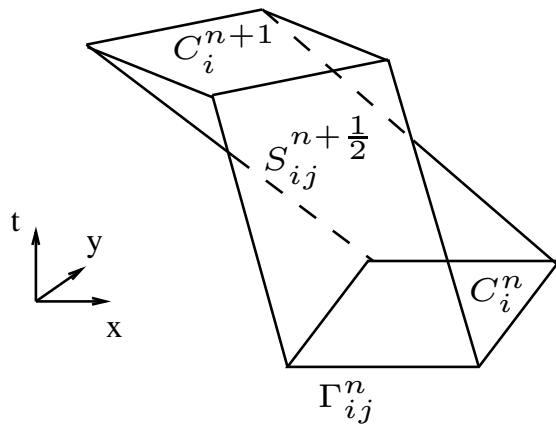
$$\left( \frac{\partial (\hat{h} \hat{\mathbf{u}})}{\partial t} \right)_i + \nabla_i \cdot (\hat{h} \hat{\mathbf{u}} \otimes \hat{\mathbf{u}}) + \nabla_i \left( \frac{g \hat{h}^2}{2} \right) = 0$$

$(\hat{h}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{q}} = \hat{h} \hat{\mathbf{u}})$  : hauteur d'eau, vitesse, quantité de mouvement (dans le repère *inertiel*)

**Intérêt** : Conservation immédiate de la quantité de mouvement *inertielle* (Volumes Finis)

**Difficultés** : Plus d'accès direct à la vitesse *relative* et domaine (et maillage !) mobile(s) dans le repère *inertiel*

# Volumes Finis sur des maillages mobiles 2d



Volume de contrôle  
dans le repère  $(x, y, t)$

$$\Gamma_{V_i}^{n+\frac{1}{2}} = C_i^n \cup C_{i+1}^n \cup_j S_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$$

Points clés :

Maillage *en rotation* dans le repère inertiel

Maillage *fixe* dans le repère relatif

• Quantités inertielles et relatives

$$\mathbf{x}^r = R_\Omega(t) \mathbf{x}^i$$

$$h(\mathbf{x}^r, t) = \hat{h}(\mathbf{x}^i, t)$$

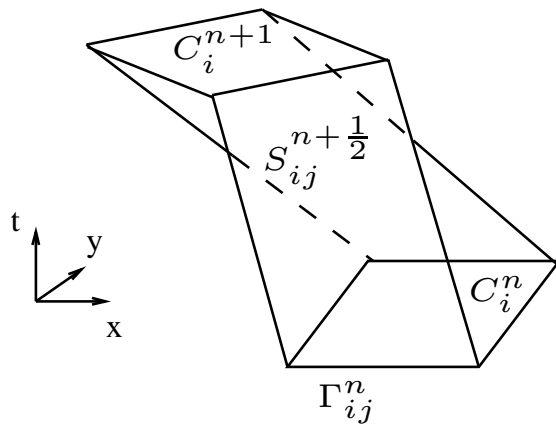
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^r, t) = R_\Omega(t) (\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^i, t) - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}^i)$$

$$\text{où } R_\Omega(t) = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \\ -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix}$$

• Vecteur normal (sortant) à  $S_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$

$$\hat{\mathbf{n}}_{ij}(t, \mathbf{x}_{ij}^n) \propto \begin{pmatrix} R_\Omega(t - t^n) \tilde{\mathbf{n}}_{ij}^{xy}(t^n) \\ -(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_{ij}^n) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ij}^{xy}(t^n) \end{pmatrix}$$

# Volumes Finis sur des maillages mobiles 2d



Volume de contrôle  
dans le repère  $(x, y, t)$

$$\Gamma_{V_i}^{n+\frac{1}{2}} = C_i^n \cup C_{i+1}^n \cup_j S_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$$

Points clés :

Maillage *en rotation* dans le repère inertiel

Maillage *fixe* dans le repère relatif

• Quantités inertielles et relatives

$$\mathbf{x}^r = R_\Omega(t) \mathbf{x}^i$$

$$h(\mathbf{x}^r, t) = \hat{h}(\mathbf{x}^i, t)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^r, t) = R_\Omega(t) (\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^i, t) - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}^i)$$

$$\text{où } R_\Omega(t) = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \\ -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix}$$

• Vecteur normal (sortant) à  $S_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$

$$\hat{\mathbf{n}}_{ij}(t, \mathbf{x}_{ij}^n) \propto \begin{pmatrix} R_\Omega(t - t^n) \tilde{\mathbf{n}}_{ij}^{xy}(t^n) \\ -(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_{ij}^n) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ij}^{xy}(t^n) \end{pmatrix}$$

## Un schema conservatif

$$\begin{aligned}h_i^{n+1} &= h_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_j F_{ij}^h \\ \mathbf{q}_i^{n+1} &= \mathbf{q}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \sum_j \mathbf{F}_{ij}^q \\ &\quad - \Delta t \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}_i^n \\ &\quad - \frac{\Delta t}{|C_i|} \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \sum_j \left(F_{ij}^h \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_{ij}\right) \\ &\quad - h_i^{n+1} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i + h_i^n R(\Delta t) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i\end{aligned}$$

où  $F_{ij}^h$  et  $\mathbf{F}_{ij}^q$  sont les flux de masse et de quantité de mouvement classiques (dans le repère *relatif*).

## Un schema conservatif

$$\begin{aligned}h_i^{n+1} &= h_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_j F_{ij}^h \\ \mathbf{q}_i^{n+1} &= \mathbf{q}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \sum_j \mathbf{F}_{ij}^q \\ &\quad - \Delta t \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}_i^n \\ &\quad - \frac{\Delta t}{|C_i|} \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \sum_j \left( F_{ij}^h \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_{ij} \right) \\ &\quad - h_i^{n+1} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i + h_i^n R(\Delta t) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i\end{aligned}$$

où  $F_{ij}^h$  et  $\mathbf{F}_{ij}^q$  sont les flux de masse et de quantité de mouvement classiques (dans le repère *relatif*).

## Un schema conservatif

$$h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_j F_{ij}^h$$

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_j \mathbf{F}_{ij}^q$$

$$- \Delta t \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}_i^n$$

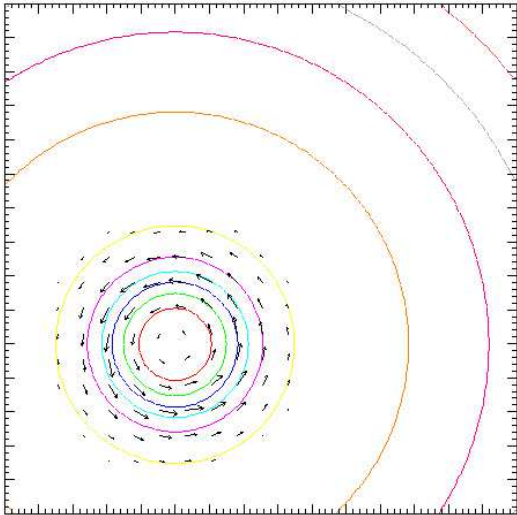
$$- \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_j \left( F_{ij}^h \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_{ij} \right)$$

$$- h_i^{n+1} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i + h_i^n R(\Delta t) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i + o(\Delta t)$$

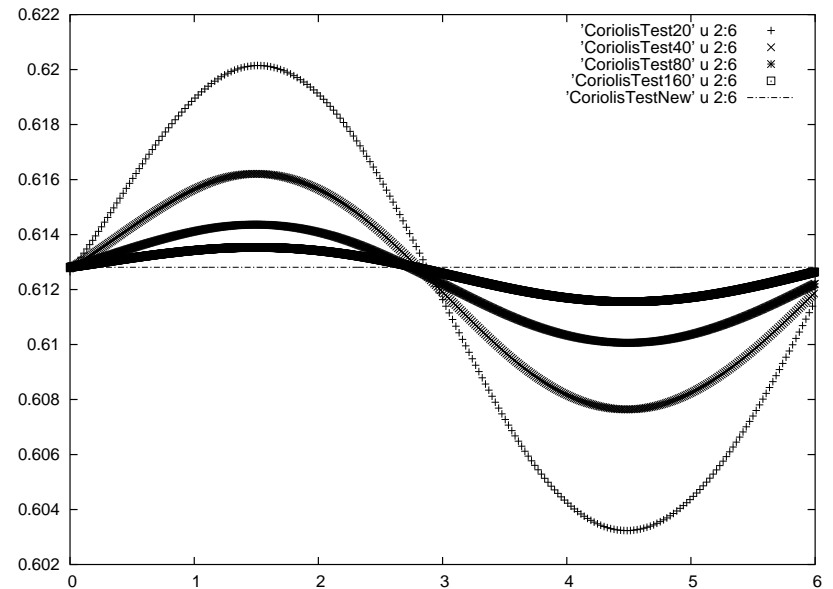
où  $F_{ij}^h$  et  $\mathbf{F}_{ij}^q$  sont les flux de masse et de quantité de mouvement classiques (dans le repère *relatif*).



# Un exemple numérique



Conditions initiales :  
Hauteur d'eau (isovaleurs)  
et vitesse (vecteurs)



Evolution de la quantité de mouvement  
en fonction du temps (repère *inertiel*)  
(Méthodes classique (centrée) et conservative)

# Le terme de Coriolis

Terme source discret dans le schéma conservatif

$$-\Delta t \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}_i^n$$
$$-\frac{\Delta t}{|C_i|} \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \sum_j \left(F_{ij}^h \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_{ij}\right)$$

$$-h_i^{n+1} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i + h_i^n R(\Delta t) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i$$

# Le terme de Coriolis

Terme source discret dans le schéma conservatif

$$-\Delta t \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}_i^n$$
$$-\frac{\Delta t}{|C_i|} \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \sum_j \left(F_{ij}^h \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_{ij}\right)$$

$$-h_i^{n+1} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i + h_i^n R(\Delta t) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i$$

**Problème** : Comment distinguer force de Coriolis et force centrifuge ?

# Le terme de Coriolis

Terme source discret dans le schéma conservatif

$$\begin{aligned} & -\Delta t \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}_i^n \\ & -\frac{\Delta t}{|C_i|} \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \sum_j \left( F_{ij}^h \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i) \right) \\ & -\frac{\Delta t}{|C_i|} \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \left( \left( \sum_j F_{ij}^h \right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i \right) \\ & -h_i^{n+1} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i + h_i^n R(\Delta t) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i \end{aligned}$$

**Problème** : Comment distinguer force de Coriolis et force centrifuge ?

**Idée** : Faire apparaître un terme local  
puis utiliser le schéma sur la hauteur d'eau

$$h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_j F_{ij}^h$$

# Le terme de Coriolis

Terme source discret dans le schéma conservatif

$$- \Delta t \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin \left( \frac{\Omega \Delta t}{2} \right) R \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}_i^n$$

$$- \frac{\Delta t}{|C_i|} \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin \left( \frac{\Omega \Delta t}{2} \right) R \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \sum_j \left( F_{ij}^h \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i) \right)$$

$$- h_i^n \left( \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin \left( \frac{\Omega \Delta t}{2} \right) R \left( \frac{\Delta t}{2} \right) - R(\Delta t) \right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i$$

$$- h_i^{n+1} \left( R(0) - \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin \left( \frac{\Omega \Delta t}{2} \right) R \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i$$

# Le terme de Coriolis

Terme source discret dans le schéma conservatif

$$\begin{aligned} & - \Delta t \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin \left( \frac{\Omega \Delta t}{2} \right) R \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}_i^n \\ & - \frac{\Delta t}{|C_i|} \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin \left( \frac{\Omega \Delta t}{2} \right) R \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \sum_j \left( F_{ij}^h \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i) \right) \\ & - h_i^n \left( \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin \left( \frac{\Omega \Delta t}{2} \right) R \left( \frac{\Delta t}{2} \right) - R(\Delta t) \right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i \\ & - h_i^{n+1} \left( R(0) - \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin \left( \frac{\Omega \Delta t}{2} \right) R \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i \end{aligned}$$

# Le terme de Coriolis

Terme source discret dans le schéma conservatif

$$- \Delta t \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}_i^n$$

$$- \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_j \left( F_{ij}^h \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i) \right)$$

$$- \Delta t \frac{h_i^n + h_i^{n+1}}{2} \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i)$$

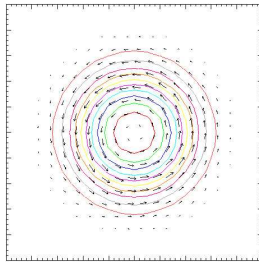
$$+ o(\Delta t)$$

Terme Coriolis  
centré

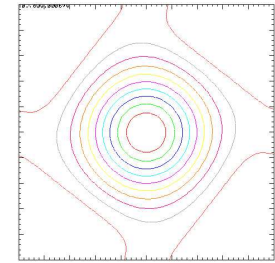
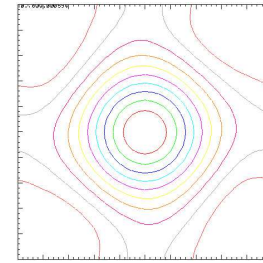
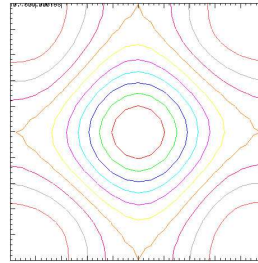
Terme Coriolis  
décentré

Terme centrifuge  
centré semi-implicite

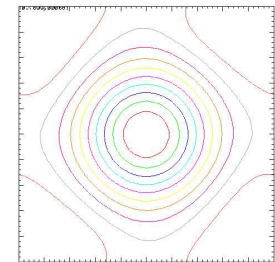
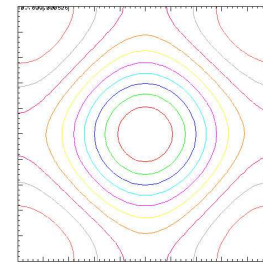
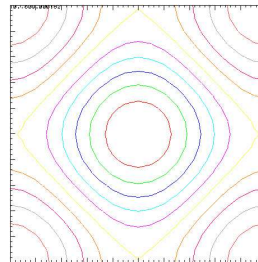
# Coriolis centré / décentré



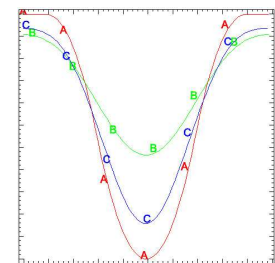
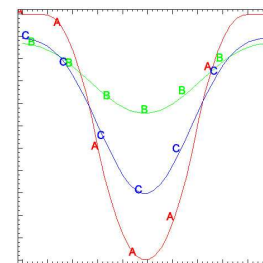
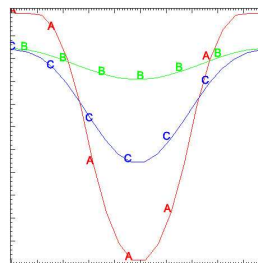
Conditions initiales :  
Hauteur d'eau (isovaleurs)  
et vitesse (vecteurs)



Décentré



Centré



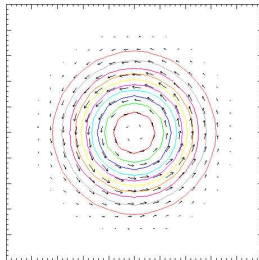
20x20

40x40

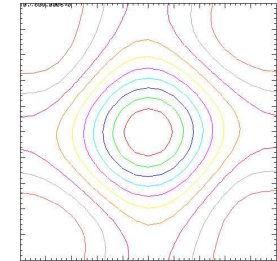
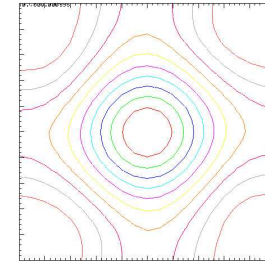
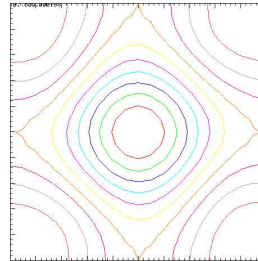
80x80



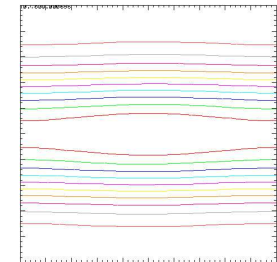
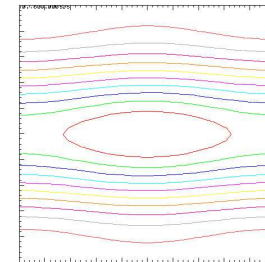
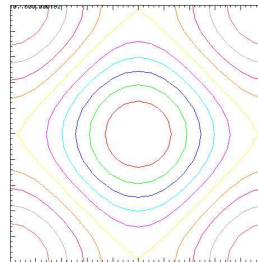
# Coriolis centré / décentré - Maillages anisotropes



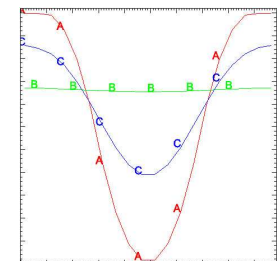
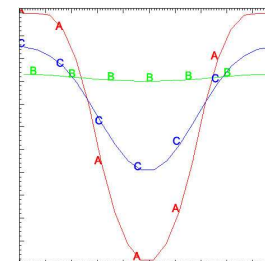
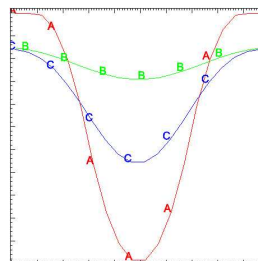
Conditions initiales :  
Hauteur d'eau (isovaleurs)  
et vitesse (vecteurs)



Décentré



Centré



20x20

20x40

20x80

## Un schema équilibré

► Equilibre géostrophique :  $\nabla_{\mathbf{r}} \left( \frac{gh^2}{2} \right) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (h\mathbf{u}) = 0$

# Un schema équilibré

▲ Equilibre géostrophique :  $\nabla_{\mathbf{r}} \left( \frac{gh^2}{2} \right) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (h\mathbf{u}) = 0$

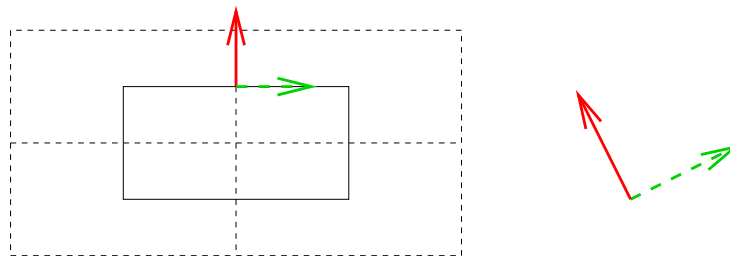
▲ Problème : Discrétisation consistante des termes sources !

- Introduction d'une pression de Coriolis

$$\nabla p_c + 2\boldsymbol{\Omega} \times h\mathbf{u} = 0$$

- Résolution d'une équation de Poisson sur la grille duale

$$\int_{\Gamma_{\tilde{C}_k}} \nabla p_c \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{kl} + \int_{\Gamma_{\tilde{C}_k}} 2(\boldsymbol{\Omega} \times h\mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{kl} = 0$$



# Un schema équilibré

▲ Equilibre géostrophique :  $\nabla_{\mathbf{r}} \left( \frac{gh^2}{2} \right) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (h\mathbf{u}) = 0$

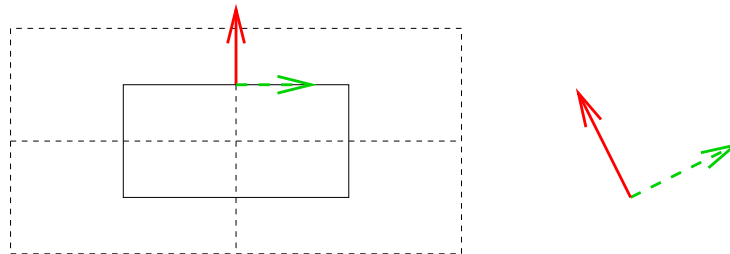
▲ Problème : Discrétisation consistante des termes sources !

- Introduction d'une pression de Coriolis

$$\nabla p_c + 2\boldsymbol{\Omega} \times h\mathbf{u} = 0$$

- Résolution d'une équation de Poisson sur la grille duale

$$\Delta p_c(\tilde{x}_k) + \frac{1}{|\tilde{C}_k|} 2\boldsymbol{\Omega} \sum_l F_{i(k,l),j(k,l)}^h = 0$$



Là encore la pression de Coriolis est construite à partir des **flux de masse**