

# CANUM 2006

Image space

$b_i$



Object space

## FA-SART :

Un algorithme itératif de reconstruction tomographique  
adapté à la fréquence

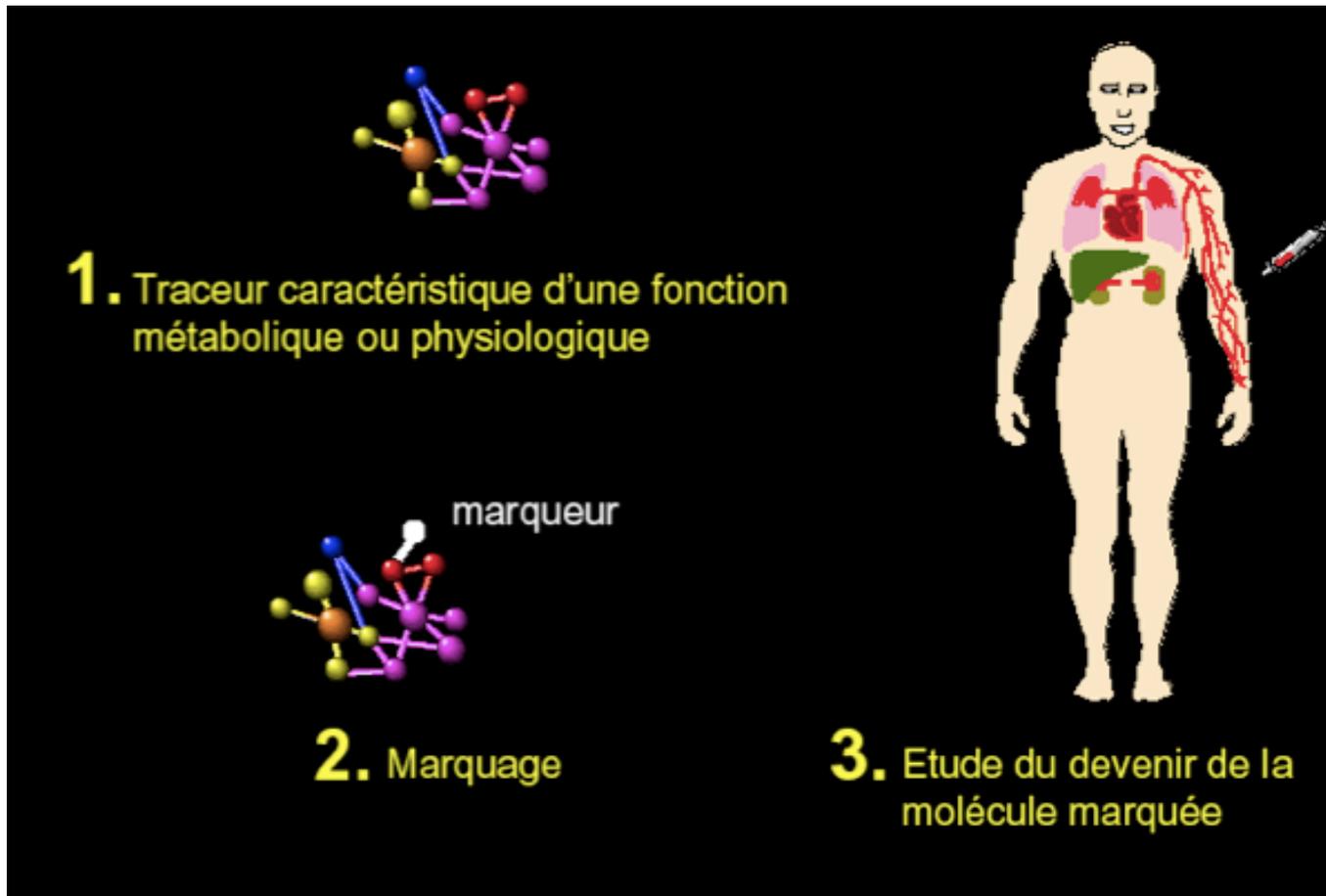
**Vincent Israel-Jost,**

*IRMA, Strasbourg*

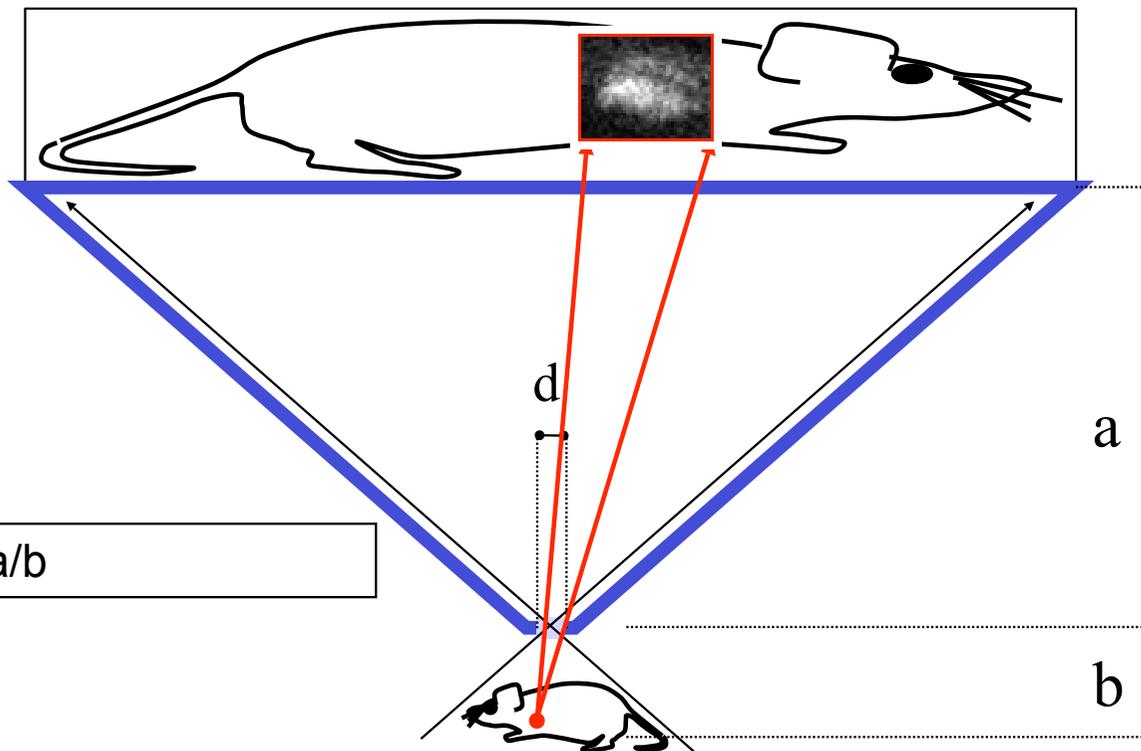
*Laboratoire de Biophysique et Médecine Nucléaire,*

*Hôpital de Hautepierre, Strasbourg*

# La tomographie par émission monophotonique (TEMP) : application au petit animal



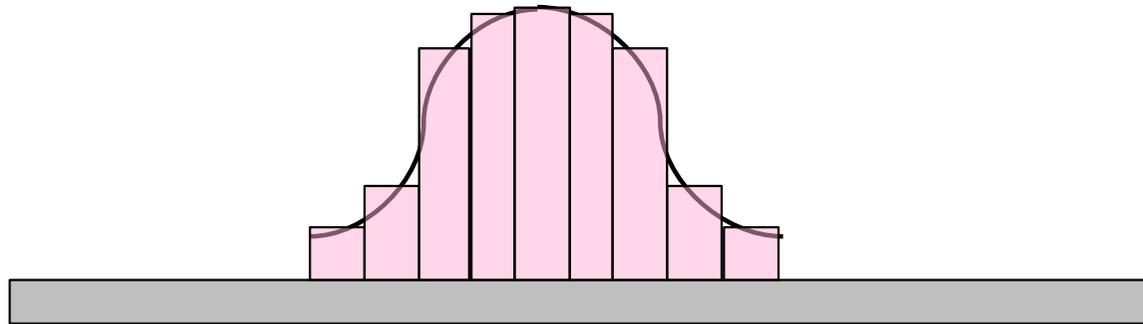
# Gamma caméra



ZOOM =  $a/b$



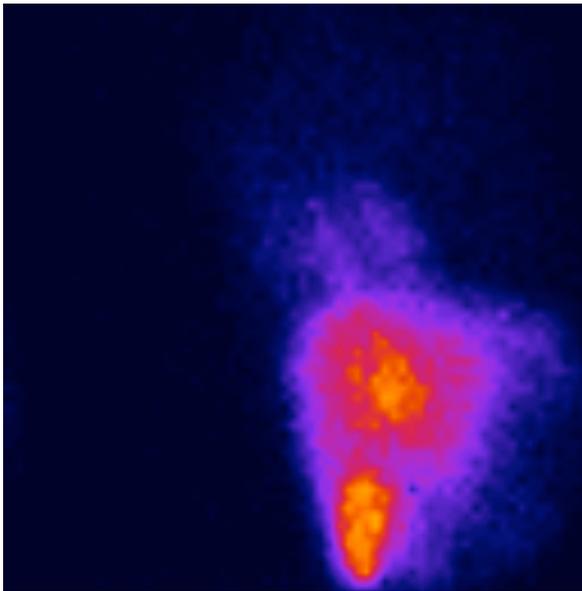
La projection est décrite par une gaussienne à support sur la tache. Sa décroissance radiale a été mesurée en faisant l'image d'une source linéique.



## Structure d'une image :

Une image de projection, acquise est donc :

- la projection "idéale" de l'objet (R.I.=Dirac) +
- une convolution avec des R.I. gaussiennes spatialement dépendantes +
- du bruit



### **Perfusion myocardique chez la souris :**

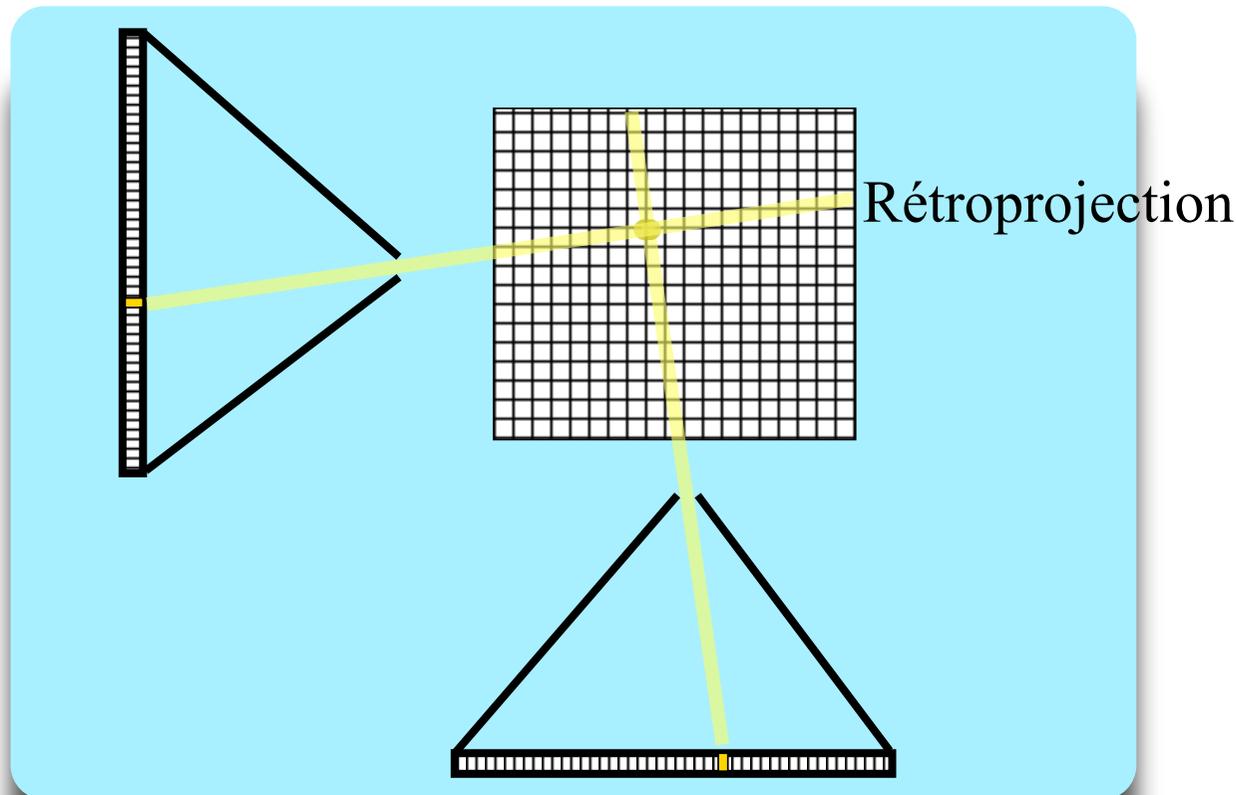
traceur : technécium Myoview TC99m  
48 projections de 64x64 pixels,  
rayon de rotation : 30 mm  
facteur de zoom : x4  
Ø pinhole : 1,5 mm

# Reconstruction à partir des projections

problème lourd :  $M$  équations,  $N$  inconnues, typiquement  $M=N>64^3$

Une itération représente donc un temps non-négligeable:

- 1 minute en  $64^3$
- 25 minutes en  $128^3$



**Problème** : Temps de reconstruction des hautes fréquences  
(nombreuses itérations)

L'un des algorithmes les plus utilisés en tomographie est **SART** :

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}} \sum_{i=1}^M \frac{b_i - (Ax^k)_i}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}} A_{i,j}$$

Andersen & Kak, 1984

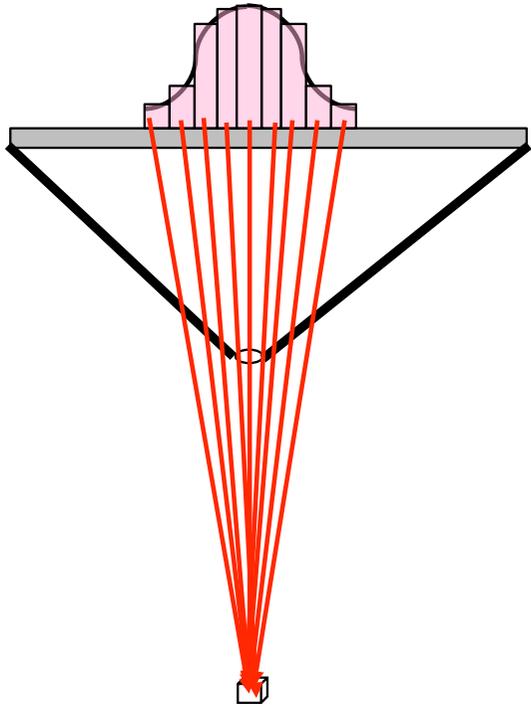
$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}} \sum_{i=1}^M \frac{b_i - (Ax^k)_i}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}} A_{i,j}$$

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}} \sum_{i=1}^M d_i \cdot A_{i,j} \quad \text{avec}$$

$$d_i = \frac{b_i - (Ax^k)_i}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}}$$

On remet à jour le voxel  $j$  à partir de toutes les mesures des pixels  $i$  telles que  $A_{i,j} \neq 0$  : *full backprojection condition (FBC)*.

A notre connaissance, tous les algorithmes de résolution de systèmes linéaires respectent cette condition.

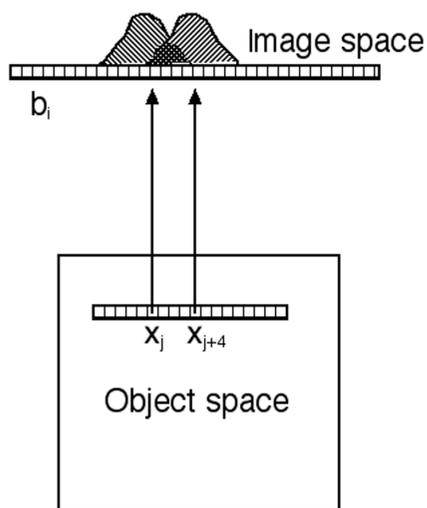


$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}} \sum_{i=1}^M d_i \cdot A_{i,j}$$

Avantages de cette pondération pour estimer les voxels :

- moyenne pondérée : réduit le bruit haute-fréquence.
- seuls les coefficients non-nuls de  $A$  jouent un rôle (contrairement à Cimmino) : convergence rapide.
- les poids des différentes mesures suivent la R.I. normalisée : moins de poids pour les mesures ayant une moins bonne statistique de comptage pour un voxel donné.

MAIS



Les hautes fréquences sont lentement reconstruites : *FBC*  
Le lissage induit par *SART* agit sur les hautes fréquences en général, pas seulement le bruit !

posant  $G_{i,j} = A_{i,j} / \sum_{i=1}^M A_{i,j}$  (R.I. normalisée)

la mise à jour d'un plan de voxels parallèle au détecteur par la formule

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}} \sum_{i=1}^M d_i \cdot A_{i,j}$$

prend la forme d'une convolution

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \lambda \cdot d * G(h^j)$$

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \lambda \cdot d * G(h^j)$$

En 1D :  $g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right)$

Du point de vue fréquentiel, on a donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(d * g)(\nu) &= \mathcal{F}(d) \cdot \mathcal{F}(g)(\nu) \\ &= \mathcal{F}(d) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{\frac{2}{\sigma^2}}\right)\end{aligned}$$

On a donc filtré  $d$  avec un filtre gaussien de variance  $1/\sigma$ .  
C'est un filtre passe-bas qui, comme attendu, lisse fortement les hautes fréquences.

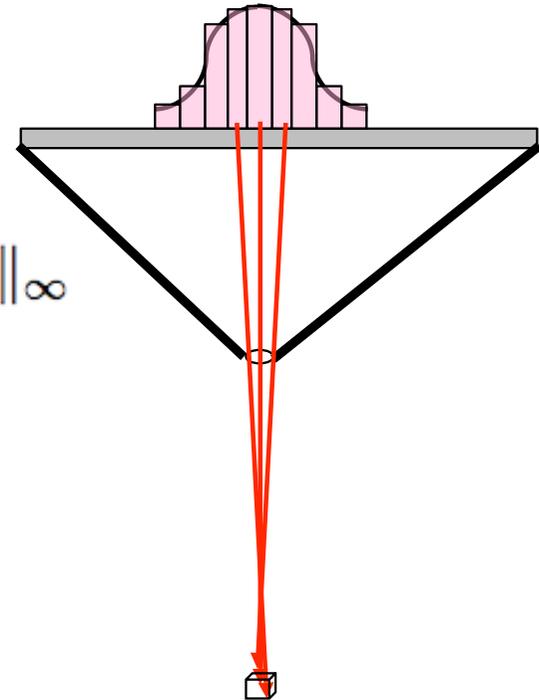
Méthode la plus simple pour avoir G moins large : la tronquer.  
Dès lors, on élimine des mesures  $A_{i,j} \neq 0$  dans l'estimation des voxels. Plus de *FBC*.

Adaptation de l'algorithme SART : on définit un seuil de coupure

$$0 \leq \rho \leq 1$$

Et l'on définit :

$$A^\rho := \begin{cases} A_{i,j} & \text{si } A_{i,j} \geq \rho \cdot \|A_{\bullet,j}\|_\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



On obtient :

# ALGORITHME FA-SART

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}^\rho} \sum_{i=1}^M \frac{b_i - (Ax^k)_i}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}^\rho} A_{i,j}^\rho$$

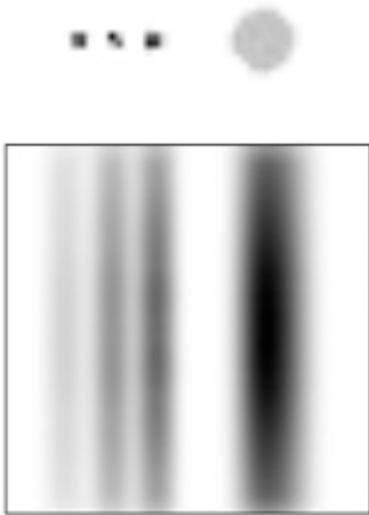
S'utilise en réglant le paramètre  $0 \leq \rho \leq 1$

- proche de 1 pour une reconstruction rapide des hautes fréquences (attention au bruit).

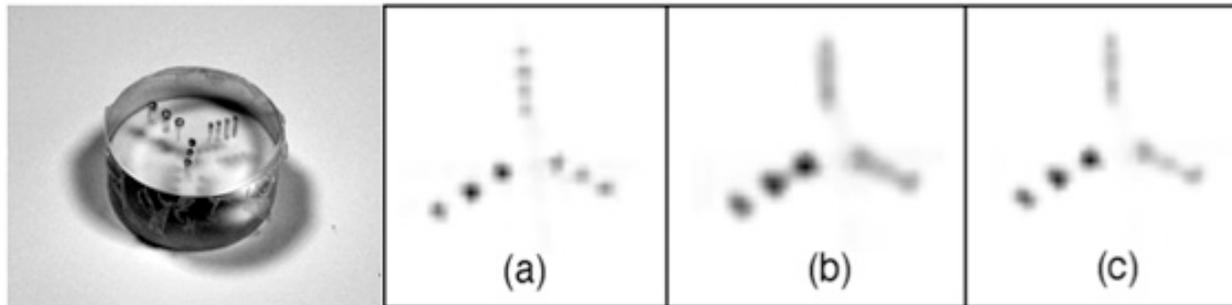
- proche de 0 (SART) pour des objets basses fréquences.

Possibilité d'une descente progressive entre 1 et 0.

# RÉSULTATS - fantôme informatique



# RÉSULTATS - fantôme physique



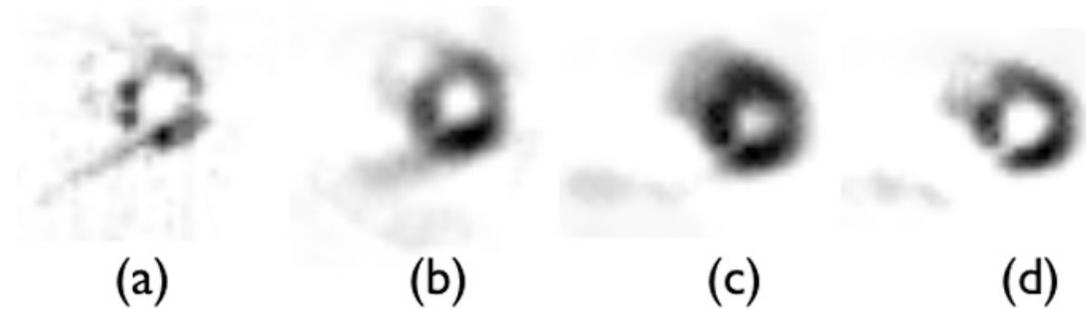
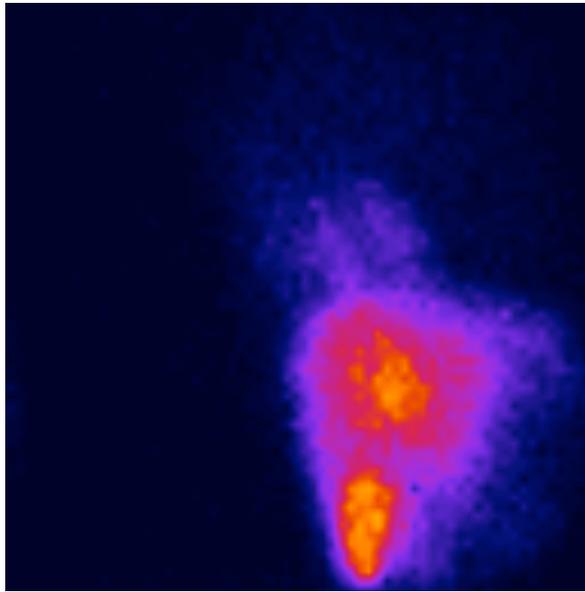
FA-SART  
(3 it.)

SART  
(3 it.)

SART  
(10 it.)

FA-SART peut aussi être utilisé en préconditionnement (d) :  
2 itérations FA-SART, 1 itération SART.

# RÉSULTATS - souris



(a) FA SART,  $\rho = 1$

(b) FA SART,  $\rho = 0.8$

(c) SART (3 it.)

(d) SART (10 it.)

# CONCLUSION

Avec ce nouvel algorithme, tout objet peut être reconstruit en un nombre donné d'itérations (3 pour nous).

Coût : savoir choisir  $\rho$

V. Israel-Jost, Ph. Choquet, A. Constantinesco, "A prospective study on algorithms adapted to the spatial frequency in tomography," International Journal of Biomedical Imaging (Accepté le 25 avril 2006). Disponible en ligne sur le site de IJBI Special Issues - Development of computed tomography algorithms

En préparation

V. Israel-Jost, "FA-SART : an algorithm adapted to the spatial frequency in tomography," destiné au SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications (SIMAX).