

# *Résolution deux échelles des équations de Maxwell*

Canum 2006

H. Abboud<sup>†</sup>, S. Jund<sup>‡</sup>, S. Salmon<sup>‡</sup>, E. Sonnendrücker<sup>‡</sup>, H. Zorgati\*

† Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

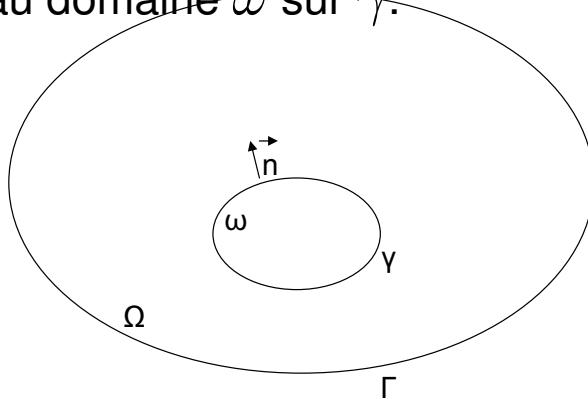
‡ Institut de Recherche Mathématiques Avancées, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

\* CEREMADE, Université Paris-Dauphine.

---

## Problème théorique

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert borné et régulier de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  et soit  $\omega \subset \Omega$  un second ouvert, inclus dans  $\Omega$  de frontière  $\gamma$ . On désigne par  $\vec{n}$  la normale unitaire sortante au domaine  $\omega$  sur  $\gamma$ .



Nous allons considérer le problème suivant :

$$\begin{cases} U + \nabla \times \nabla \times U = F_1 + F_2 \text{ in } \Omega, \\ U \times \vec{n} = 0 \text{ on } \Gamma. \end{cases} \quad (1)$$

où  $supp(F_2) \subset \omega$ .

L'idée est alors de résoudre deux problèmes couplés, suivant deux échelles adaptées, à savoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} V + \nabla \times \nabla \times V = F_1 \text{ in } \Omega \setminus \gamma, \\ V \times \vec{n} = 0 \text{ on } \Gamma, \\ [V \times \vec{n}] = 0 \text{ on } \gamma, \\ [(\nabla \times V) \times \vec{n}] = -\lambda \text{ on } \gamma \end{array} \right. \quad (2)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} W + \nabla \times \nabla \times W = F_1 + F_2 \text{ in } \omega, \\ W \times \vec{n} = V \times \vec{n} \text{ on } \gamma \end{array} \right. \quad (3)$$

où,  $[\psi] = \psi^+ - \psi^-$  désigne le saut de  $\psi$  à travers  $\gamma$ ,  $\psi^+$  et  $\psi^-$  sont respectivement la restriction de  $\psi$  à  $\Omega \setminus \bar{\omega}$  et  $\omega$ .

---

Le problème est alors le suivant : comment choisir  $\lambda$  de manière à ce que la solution de notre problème initial (1) soit donné par

$$U = V^+ \cdot \chi(\Omega \setminus \overline{\omega}) + W \cdot \chi(\omega). \quad (4)$$

La réponse est

$$\lambda = (\nabla \times V^-) \times \vec{n} - (\nabla \times W) \times \vec{n}.$$

En effet supposons que l'on dispose d'une solution  $U$  de notre problème initial (1) définie comme dans (4), alors  $\forall \phi \in H_0(\text{curl}, \Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U \cdot \phi dX + \int_{\Omega} (\nabla \times U) \cdot (\nabla \times \phi) dX &= \\ \int_{\Omega} U \cdot \phi dX + \int_{\Omega \setminus \overline{\omega}} (\nabla \times V^+) \cdot (\nabla \times \phi) dX + \int_{\omega} (\nabla \times W) \cdot (\nabla \times \phi) dX \end{aligned} \quad (5)$$

---

où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} (\nabla \times V^+).(\nabla \times \phi) dX &= \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} (\nabla \times \nabla \times V^+).\phi dX \\ &\quad + \int_{\Gamma \cup \gamma} ((\nabla \times V^+) \times \vec{m}).\phi d\sigma \end{aligned} \tag{6}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\omega} (\nabla \times W).(\nabla \times \phi) dX &= \int_{\omega} (\nabla \times \nabla \times W).\phi dX \\ &\quad + \int_{\gamma} ((\nabla \times W) \times \vec{n}).\phi d\sigma \end{aligned} \tag{7}$$

En combinant (6) et (7), et en remarquant que

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times V^+ \times \vec{m}).\phi d\sigma = - \int_{\Gamma} (\nabla \times V^+).(\phi \times \vec{m}) d\sigma = 0,$$

l'équation (5) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U.\phi dX + \int_{\Omega} (\nabla \times U).(\nabla \times \phi) dX &= \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} F_1.\phi dX + \\ \int_{\omega} (F_1 + F_2).\phi dX + \int_{\gamma} \{ &((\nabla \times W) \times \vec{n}) - ((\nabla \times V^+) \times \vec{n})\}.\phi d\sigma \end{aligned} \tag{8}$$

---

Comme

$$\lambda := (\nabla \times V^-) \times \vec{n} - (\nabla \times V^+) \times \vec{n} = (\nabla \times V^-) \times \vec{n} - (\nabla \times W) \times \vec{n},$$

alors

$$\int_{\gamma} \{((\nabla \times W) \times \vec{n}) - ((\nabla \times V^+) \times \vec{n})\} \cdot \phi d\sigma = 0$$

et finalement,

$$\int_{\Omega} U \cdot \phi dX + \int_{\Omega} (\nabla \times U) \cdot (\nabla \times \phi) dX = \int_{\Omega} (F_1 + F_2) \cdot \phi dX \quad \square$$

Tout le problème revient donc à déterminer  $\lambda$  de manière à ce que

$$T\lambda = ((\nabla \times W) \times \vec{n}) - ((\nabla \times V^+) \times \vec{n}) = 0$$

---

On peut prouver que  $T\lambda = \lambda + ((\nabla \times \overline{W}) \times \overrightarrow{n}) - ((\nabla \times \overline{V}^+) \times \overrightarrow{n})$  où

$$\begin{cases} \overline{V} + \nabla \times \nabla \times \overline{V} = F_1 \text{ in } \Omega, \\ \overline{V} \times \overrightarrow{n} = 0 \text{ on } \Gamma \end{cases} \quad (9)$$

et

$$\begin{cases} \overline{W} + \nabla \times \nabla \times \overline{W} = F_1 + F_2 \text{ in } \omega, \\ \overline{W} \times \overrightarrow{n} = \overline{V} \times \overrightarrow{n} \text{ on } \gamma \end{cases} \quad (10)$$

*Demo.* Il suffit d'introduire les fonctions  $\widetilde{W} = W - V^-$  et  $\widetilde{\overline{W}} = \overline{W} - \overline{V}^-$ , et de remarquer qu'elles vérifient toutes les deux

$$\begin{cases} E + \nabla \times \nabla \times E = F_2 \text{ in } \omega, \\ E \times \overrightarrow{n} = 0 \text{ on } \gamma \end{cases} \quad (11)$$

---

De l'unicité de la solution de ce problème on déduit directement que

$$(\nabla \times \widetilde{W}) \times \vec{n} = (\nabla \times \widetilde{\overline{W}}) \times \vec{n}$$

i.e

$$(\nabla \times W) \times \vec{n} - (\nabla \times V^-) \times \vec{n} = (\nabla \times \overline{W}) \times \vec{n} - (\nabla \times \overline{V}^-) \times \vec{n}$$
$$\pm (\nabla \times V^+) \times \vec{n} \quad \quad \quad \pm (\nabla \times \overline{V}^+) \times \vec{n}$$

où

$$(\nabla \times \overline{V}^+) \times \vec{n} - (\nabla \times \overline{V}^-) \times \vec{n} = 0,$$

$$(\nabla \times V^+) \times \vec{n} - (\nabla \times V^-) \times \vec{n} = -\lambda,$$

et

$$((\nabla \times W) \times \vec{n}) - ((\nabla \times V^+) \times \vec{n}) = T\lambda. \quad \square$$

---

## Algorithme de résolution

Nous venons de voir que la solution de notre problème initial peut être déterminée de la manière suivante :

1. déterminer  $\bar{V}$  et  $\bar{W}$  en résolvant les problèmes (9) et (10)
2. définir  $\lambda = ((\nabla \times \bar{V}^+) \times \vec{n}) - ((\nabla \times \bar{W}) \times \vec{n})$
3. déterminer  $V$  et  $W$  en résolvant les problèmes (2) et (3)
4. définir la solution du problème par  $U = V^+.\chi(\Omega \setminus \bar{\omega}) + W.\chi(\omega)$

Dans la pratique nous allons plutôt faire un point fixe sur l'opérateur  $I - T\lambda$  de la manière suivante :

1. initialiser  $\lambda = 0$
2. déterminer  $V$  et  $W$  en résolvant les problèmes (2) et (3)
3. définir  $\lambda = \lambda - T\lambda = \lambda - ((\nabla \times W) \times \vec{n}) - ((\nabla \times V^+) \times \vec{n})$
4. retourner à l'étape 2.
5. définir la solution du problème par  $U = V^+.\chi(\Omega \setminus \bar{\omega}) + W.\chi(\omega)$

---

Et plutôt que de calculer

$$\int_{\gamma} T\lambda.\Phi \, d\sigma := \int_{\gamma} ((\nabla \times W) \times \vec{n}) - ((\nabla \times V^+) \times \vec{n}).\Phi \, d\sigma,$$

nous l'approchons par

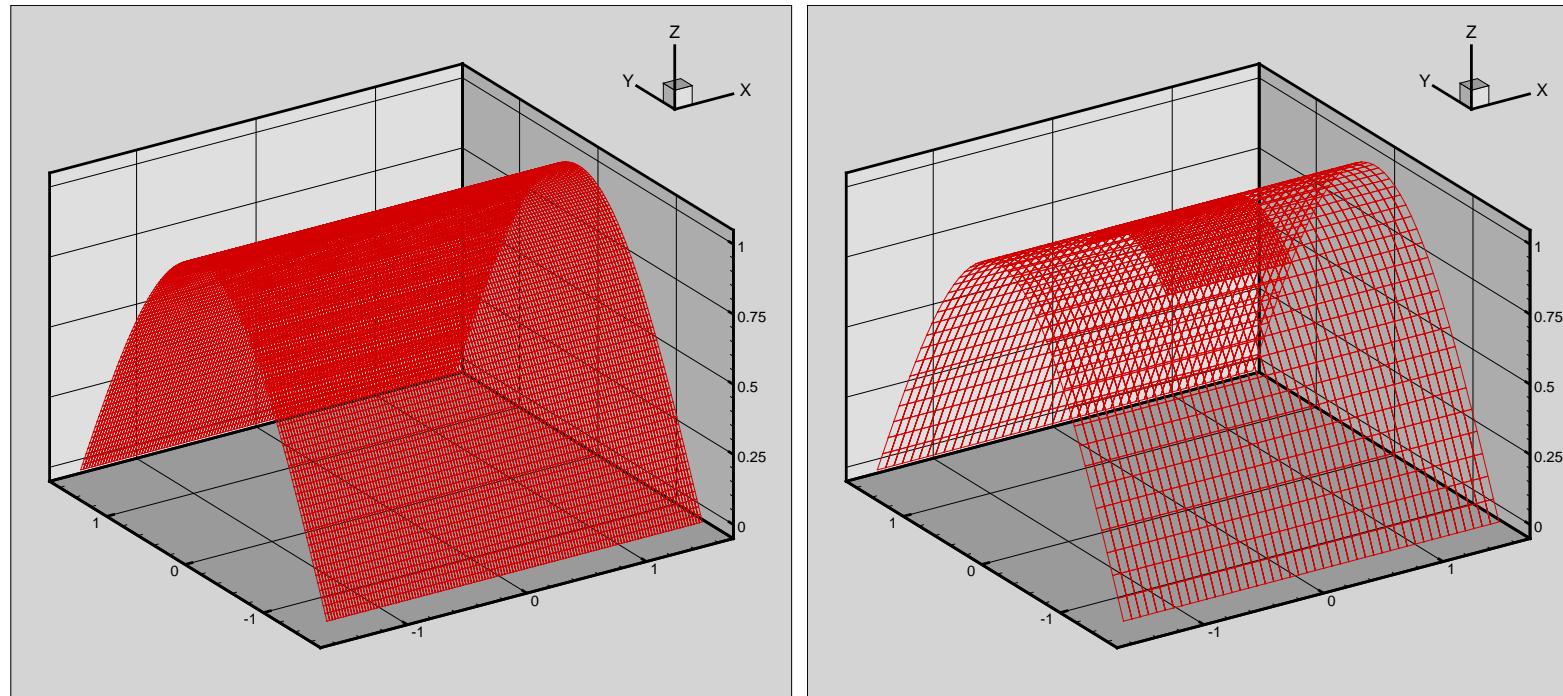
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \delta.\Phi \, d\sigma &= \int_{\gamma} \lambda.\Phi \, d\sigma \\ &+ \left( \int_{\omega} W.\Phi \, dX + \int_{\omega} (\nabla \times W)(\nabla \times \Phi) \, dX - \int_{\omega} (f_1 + f_2).\Phi \, dX \right) \\ &- \left( \int_{\omega} V^-.\Phi \, dX + \int_{\omega} (\nabla \times V^-)(\nabla \times \Phi) \, dX - \int_{\omega} f_1.\Phi \, dX \right). \end{aligned}$$

## Tests numériques

Premier cas test :

Nous considérons  $\Omega = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\omega = [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}] \times [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ ,

$$F_1 = \begin{pmatrix} 2 \cos(y) \\ 2 \cos(x) \end{pmatrix} \text{ et } F_2 = 0.$$



---

Second order finite elements				
Iteration	1	2	5	10
$L^2$ error	0.782792E-03	0.782497E-03	0.782531E-03	0.782531E-03
$L^2$ exterior error	0.782768E-03	0.782436E-03	0.782461E-03	0.782461E-03
$L^2$ interior error	0.619664E-05	0.975681E-05	0.104523E-04	0.104533E-04
$H(\vec{\text{curl}})$ error	0.140502E-01	0.140502E-01	0.140502E-01	0.140502E-01
$H(\vec{\text{curl}})$ exterior error	0.140502E-01	0.140502E-01	0.140502E-01	0.140502E-01
$H(\vec{\text{curl}})$ interior error	0.646364E-05	0.987531E-05	0.105641E-04	0.105651E-04
Third order finite elements				
Iteration	1	2	5	10
$L^2$ error	0.162382E-04	0.163019E-04	0.163055E-04	0.163055E-04
$L^2$ exterior error	0.160183E-04	0.162550E-04	0.162577E-04	0.162577E-04
$L^2$ interior error	0.266325E-05	0.123525E-05	0.124682E-05	0.124682E-05
$H(\vec{\text{curl}})$ error	0.409312E-03	0.409298E-03	0.409298E-03	0.409298E-03
$H(\vec{\text{curl}})$ exterior error	0.409303E-03	0.409296E-03	0.409296E-03	0.409296E-03
$H(\vec{\text{curl}})$ interior error	0.277800E-05	0.124110E-05	0.125261E-05	0.125262E-05

TAB. 1 – Numerical errors on a  $9 \times 9$  grid for the first test case.

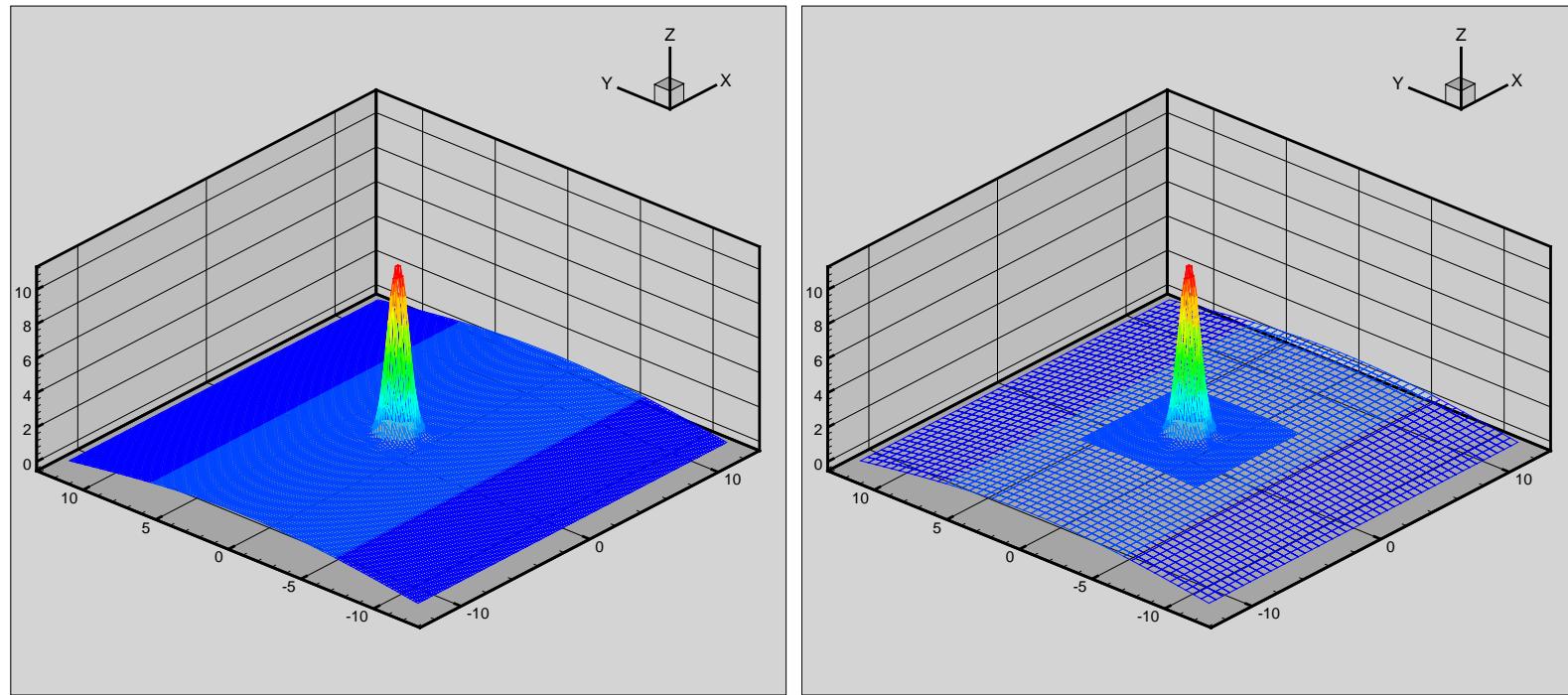
---

### Second cas test :

$$\Omega = [-12, 12] \times [-12, 12], \omega = [-4, 4] \times [-4, 4],$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{\pi^2}{576} + 1\right) \cos\left(\frac{\pi y}{24}\right) \\ \left(\frac{\pi^2}{576} + 1\right) \cos\left(\frac{\pi x}{24}\right) \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} \eta e^{\frac{-(x^2+y^2)}{\epsilon}} \left(1 + \frac{2}{\epsilon} - 4 \frac{(y^2 - xy)}{\epsilon^2}\right) \\ \eta e^{\frac{-(x^2+y^2)}{\epsilon}} \left(1 + \frac{2}{\epsilon} - 4 \frac{(x^2 - xy)}{\epsilon^2}\right) \end{pmatrix} \text{ où } \epsilon = 0.5 \text{ et } \eta = 10$$



---

Second order finite elements				
Iteration	1	2	5	10
$L^2$ error	0.221308E-03	0.221166E-03	0.221167E-03	0.221167E-03
$L^2$ exterior error	0.221284E-03	0.221157E-03	0.221157E-03	0.221157E-03
$L^2$ interior error	0.328590E-05	0.206035E-05	0.206394E-05	0.206394E-05
$H(\vec{\text{curl}})$ error	0.157553E-02	0.157551E-02	0.157551E-02	0.157551E-02
$H(\vec{\text{curl}})$ exterior error	0.157553E-02	0.157551E-02	0.157551E-02	0.157551E-02
$H(\vec{\text{curl}})$ interior error	0.379534E-05	0.269293E-05	0.269569E-05	0.269569E-05
Third order finite elements				
Iteration	1	2	5	10
$L^2$ error	0.155777E-05	0.151122E-05	0.151120E-05	0.151120E-05
$L^2$ exterior error	0.153471E-05	0.150996E-05	0.150993E-05	0.150993E-05
$L^2$ interior error	0.267050E-06	0.616534E-07	0.618043E-07	0.618044E-07
$H(\vec{\text{curl}})$ error	0.152618E-04	0.152556E-04	0.152556E-04	0.152556E-04
$H(\vec{\text{curl}})$ exterior error	0.152585E-04	0.152554E-04	0.152554E-04	0.152554E-04
$H(\vec{\text{curl}})$ interior error	0.316331E-06	0.814302E-07	0.815442E-07	0.815442E-07

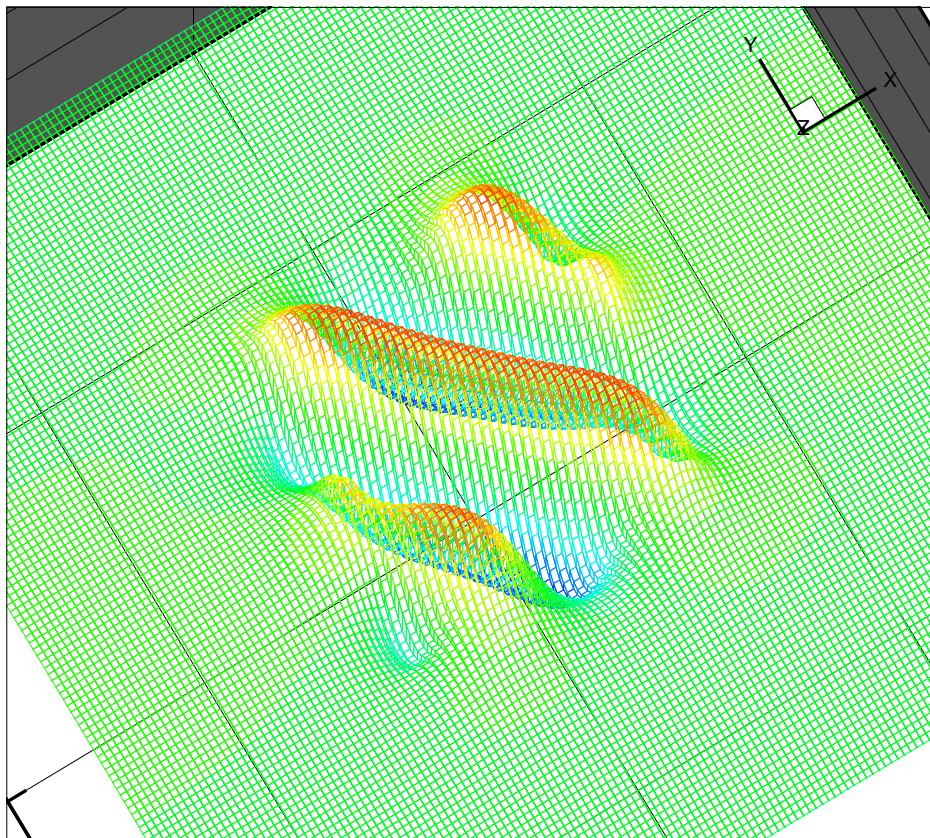
TAB. 2 – Numerical errors on a  $27 \times 27$  grid for the second test case.

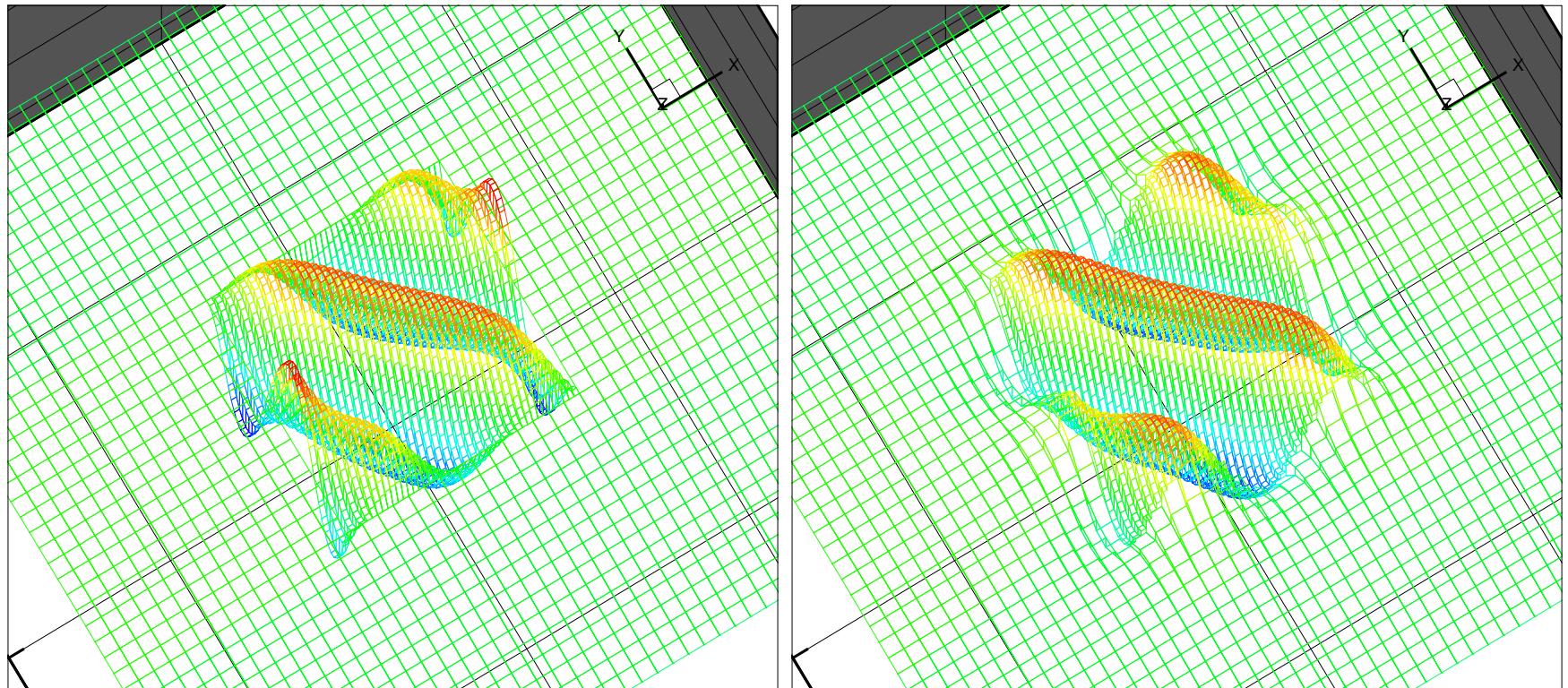
---

Troisième cas test :

$$\Omega = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \omega = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \times \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right], F_1 = \begin{pmatrix} 2 \cos(y) \\ 2 \cos(x) \end{pmatrix}$$

as background source and  $F_2 = 10 \cos(9x) \cos(9y) \chi(\omega) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$





---

Second order finite elements				
Iteration	1	2	5	10
$L^2$ error	0.238689E+01	0.708898E-01	0.707343E-01	0.707344E-01
$L^2$ exterior error	0.165395E+01	0.649181E-01	0.650094E-01	0.650095E-01
$L^2$ interior error	0.172096E+01	0.284781E-01	0.278769E-01	0.278767E-01
$H(\vec{\text{curl}})$ error	0.240243E+01	0.712253E-01	0.710700E-01	0.710700E-01
$H(\vec{\text{curl}})$ exterior error	0.166854E+01	0.652830E-01	0.653735E-01	0.653736E-01
$H(\vec{\text{curl}})$ interior error	0.172848E+01	0.284811E-01	0.278791E-01	0.278789E-01
Third order finite elements				
Iteration	1	2	5	10
$L^2$ error	0.238695E+01	0.819654E-02	0.821060E-02	0.821062E-02
$L^2$ exterior error	0.165399E+01	0.760862E-02	0.762701E-02	0.762702E-02
$L^2$ interior error	0.172100E+01	0.304830E-02	0.304017E-02	0.304020E-02
$H(\vec{\text{curl}})$ error	0.240249E+01	0.822539E-02	0.823938E-02	0.823940E-02
$H(\vec{\text{curl}})$ exterior error	0.166858E+01	0.763965E-02	0.765796E-02	0.765797E-02
$H(\vec{\text{curl}})$ interior error	0.172852E+01	0.304841E-02	0.304024E-02	0.304027E-02

TAB. 3 – Numerical errors on a  $27 \times 27$  grid for the third test case.

---

## **Conclusions**

Nous avons adapté avec succès la méthode de R. Glowinski et al. (A multi-domain method for solving numerically multi-scale elliptic problems, *C.R.Acad.Sci.Paris,ser. I 338 (2004)*).

Nous l'avons aussi adapté aux problèmes suivants :

$$\begin{cases} U - \Delta U = F_1 + F_2 \text{ in } \Omega, \\ U = 0 \text{ on } \Gamma. \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} U - \nabla(\nabla.U) = F_1 + F_2 \text{ in } \Omega, \\ U = 0 \text{ on } \Gamma. \end{cases} \quad (13)$$