Tenseurs de Polarisation pour les structures minces. Application aux arbres bronchiques

Yves CAPDEBOSCQ, UVSQ

Il s'agit de travaux effectués en collaboration avec Michael Vogelius, et Marc Briane.

1. Les matrices de polarisation. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné, et soit ω_ϵ une suite d'ouverts inclus dans $K_0 \subset \Omega$, où K_0 est un compact tel que $\mathrm{dist}(K_0, \partial\Omega) > d_0 > 0$, et tels que $|\omega_\epsilon|$ tende vers zéro avec ϵ. On note $\mathbf{1}_\epsilon$ la fonction indicatrice de ω_ϵ. Soient γ_0 et γ_1 deux fonctions régulières sur Ω. Pour tout $\phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ de moyenne nulle, on considère le problème suivant

$$-\mathrm{div}\left((\gamma_0 + \mathbf{1}_\epsilon(\gamma_1 - \gamma_0))\nabla u_\epsilon\right) = 0 \text{ sur } \Omega, \quad \gamma_0 \nabla u_\epsilon = \phi \text{ sur } \partial\Omega.$$

La solution u_ϵ est définie uniquement si on impose de plus $\int_\Omega u_\epsilon dx = 0$. On note u la solution correspondant à $|\omega_\epsilon| = 0$. La fonction matricielle de polarisation $M(x)$ caractérise l'écart, au premier ordre, entre u_ϵ et u, loin de l'inclusion. Pour toute fonction ψ régulière sur K_0 on a

$$\int_\Omega \psi(u_\epsilon - u)dx = |\omega_\epsilon| \left(\int_\Omega (\gamma_1 - \gamma_0) M(x) \nabla u \nabla \psi d\mu + o(1) \right).$$

La mesure de probabilité $d\mu$ est la limite faible* au sens des mesures de $\mathbf{1}_\epsilon |\omega_\epsilon|^{-1} dx$. La fonction matricielle M a plusieurs propriétés remarquables. En particulier, elle est symétrique définie positive, indépendante de ϕ et du domaine Ω (pour K_0 donné). De plus, elle satisfait les bornes suivantes, μ presque partout

$$\min(1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)}) \leq M(x) \leq \max(1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)}), \text{ trace } M(x) \leq d - 1 + \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \text{ et trace } M^{-1}(x) \leq d - 1 + \frac{\gamma_1(x)}{\gamma_0(x)}.$$

2. Matrices de polarisation des structures minces. Les bornes ci-dessus permettent en fait de calculer exactement les tenseurs de polarisation de structures minces, c'est à dire tendant asymptotiquement vers une structure de dimension $n-1$, pourvu que la surface présente une "rugosité" sous-critique. Une exemple typique sont les ensemble de la forme $\left\{x \in \Omega : x' \in S^{d-1} \subset \mathbb{R}^{d-1} \text{ et } |x_d| \leq \epsilon h_\epsilon(x')\right\}$, où $\|h_\epsilon\|_{C^1} < C\epsilon^{-\alpha}$ avec $\alpha < 1$.

3. Applications aux arbres bronchiques. Les arbres bronchiques peuvent être aussi vus comme des structures minces, à géométrie auto-similaire. Une adaptation des résultats précédants permet d'obtenir les tenseurs de polarisation associés.

Références

[1] Y. Capdeboscq, and M.S. Vogelius, A review of some recent work on impedance imaging for inhomogeneities of low volume fraction. Contemporary Mathematics **362** (Eds. C. Conca, R. Manasevich, G. Uhlmann, and M.S. Vogelius). AMS (2004) pp. 69–88.

[2] Y. Capdeboscq, and M.S. Vogelius, Localized polarization tensor bounds, and applications to voltage perturbations caused by small inhomogeneities. Soumis.

Yves CAPDEBOSCQ – `Yves.Capdeboscq@uvsq.fr`

Laboratoire de Mathématiques, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, 78035 Versailles Cedex