Un nouveau schéma de type MUSCL pour les problèmes hyperboliques.

Vivien CLAUZON, Université Blaise Pascal, Clermont Ferrand

On se place dans le cadre d'un problème hyperbolique scalaire multidimensionnel muni de conditions aux limites et initiales adéquates. La discrétisation de ce type de problème sur un maillage non structuré $\mathcal{T}_h$ mène à la formulation volume fini conservative d'ordre deux de type MUSCL suivante

$$\forall K_i \in \mathcal{T}_h, \quad |K_i| \frac{dU_i}{dt} = - \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} |S_{ij}| \; \boldsymbol{F}_{i,j}(t, U_{i,j}, U_{j,i}).\boldsymbol{n}_{ij}$$

où $U_{i,j}$ est la valeur reconstruite du champ U au niveau du côté i de l'interface S_{ij}. $\mathcal{V}(i)$ est l'ensemble des cellules voisines de la cellule K_i, $\boldsymbol{F}_{i,j}$ est le flux numérique et $\boldsymbol{n}_{ij}$ la normale extérieur à S_{ij}. On définit alors une nouvelle reconstruction des valeurs aux interfaces de la forme suivante

$$\forall j \in \mathcal{V}(i), \qquad U_{i,j} = U_i + p_{ij} \|\boldsymbol{B}_i \boldsymbol{X}_{ij}\|$$

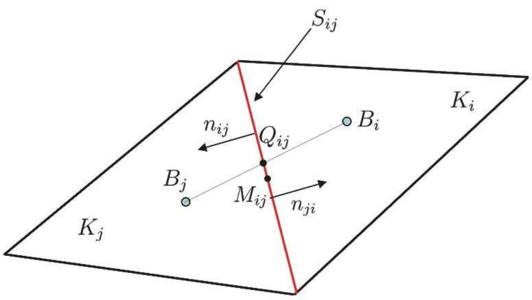
où $\boldsymbol{X}_{ij} \in S_{ij}$ est le point où la reconstruction est effectuée et $p_{ij} \in \mathbb{R}$ les pentes utilisées pour cette reconstruction linéaire dans chaque direction $\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_j$. Cette reconstruction sera dite *multipente* dans la mesure où contrairement aux méthodes standards de reconstruction elle utilise une pente différente dans chaque direction de façon immédiate lors de sa conception.

Le choix et la construction des pentes p_{ij} dépend du point $\boldsymbol{X}_{ij}$. Nous avons étudié deux cas particuliers du choix de ce point de reconstruction.

Le premier point de reconstruction étudié est le point $\boldsymbol{Q}_{ij} = [\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_j] \cap S_{ij}$. Ce point possède l'avantage d'être aligné avec $\boldsymbol{B}_i$ et $\boldsymbol{B}_j$, facilitant ainsi la mise en place d'une condition TVD suivant la direction $\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_j$.

Le second point étudié est le centre de S_{ij}, $\boldsymbol{M}_{ij}$. C'est le point de Gauss et ce choix est donc plus adapté au sens de l'intégration. N'étant pas aligné avec $\boldsymbol{B}_i$ et $\boldsymbol{B}_j$, il est plus difficile d'obtenir la stabilité du schéma. Ce choix du point de reconstruction sera toutefois le meilleur lors des tests effectués.

Nous construisons les pentes p_{ij} par *une méthode purement géométrique* et nous montrons comment la méthode ainsi créée est stable au sens du caractère LED [1] et(ou) au sens du principe du maximum pourvu que le maillage $\mathcal{T}_h$ respecte une contrainte très peu restrictive.



Quelques notations géométriques.

Le schéma nouvellement défini est *facile à programmer* et est *plus rapide que les méthodes classiques* dans la mesure où une grande majorité du calcul des pentes concerne de la géométrie et est réalisé en précalcul. L'ordre de convergence du nouveau schéma est meilleur que ceux d'une grande majorité d'autres reconstruction comme le prouvent les résultats sur les cas 2D dans [2] . Ce nouveau schéma est donc très performant.

Références

[1] Antony Jameson, *Analysis and Design of Numerical Schemes for Gas Dynamics 1. Artificial Diffusion, Upwind Biasing, Limiters and their Effect on Accuracy and Multigrid*, (1993)

[2] Thierry Buffard, Stéphane Clain, *Multi-Slope MUSCL Methods for Unstructured Meshes*, preprint du Laboratoire de Mathématiques, Université Blaise Pascal (2005)

Vivien CLAUZON – `vivien.clauzon@math.univ-bpclermont.fr`
Laboratoire de Mathématiques, Université Blaise Pascal, Campus Universitaire des Cézeaux 63177 Aubière cedex