Schémas numériques pour les problèmes faiblement bien posés

Sabrina PETIT, LAGA - Université Paris 13

A la suite des travaux de Bérenger sur les couches PML pour la troncature de domaines [1] , un regain d'intérêt apparaît pour les problèmes faiblement hyperboliques. Si la théorie des problèmes fortement hyperboliques et de leurs approximations est aujourd'hui trs̀ classique, si des résultats généraux ont été établis pour les problèmes faiblement hyperboliques [2], aucune étude de leur discrétisation n'existe. Le propos de notre travail est de donner quelques réponses en une dimension d'espace.

Considèrons le problème de Cauchy pour $U : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$

$$\begin{cases} \partial_t U(t,x) + A\partial_x U(t,x) + BU(t,x) = 0, \\ U(0,.) = U^0. \end{cases} \tag{1}$$

On suppose que la solution de ce problème vérifie une estimation de la forme:

$$\exists K > 0, \alpha > 0, \forall t > 0, \quad \|U(t,.)\|_{L^2} \leq Ke^{\alpha t}\|U^0\|_{H^{q_1}}.$$

Si $q_1 = 0$, le problème est dit fortement bien posé. Si $q_1 > 0$, le problème est dit faiblement bien posé.

Un schéma de Crank-Nicolson appliqué à (1) n'est pas stable au sens usuel [4]. Cependant, il converge numériquement pour des données initiales raisonnablement régulières. Pour expliquer ce phénomène, nous introduisons ici des notions de stabilité pour les schémas prenant en compte la perte de régularité.

Considèrons le schéma à un pas à coefficients constants de pas Δt en temps et Δx en espace:

$$Q_{-1}V^{n+1} = Q_0 V^n, \text{ où } Q_{-1} \text{ est inversible.}$$

On dit que le schéma est faiblement stable sur $[0,T]$ de défaut q_2 s'il existe des constantes positives h_0, k_0, K_S, α_S telles que pour tous Δt et Δx, pour toute étape de temps n,

$$\Delta x \leq h_0,\ \Delta t \leq k_0,\ n\Delta t \leq T \implies \|V^n\|_h \leq K_S e^{\alpha_S t_n}\|V^0\|_{h,q_2},$$

où $\|.\|_{h,q_2}$ désigne la norme de Sobolev H^{q_2} discrète.

Nous présentons les résultats suivants [3]:

- Analogue du théorème de Lax-Richtmyer dans le cas faiblement bien posé.
- Etude (en modifiant éventuellement leur définition) de la stabilité des schémas usuels.
- Calcul du taux de convergence du schéma en fonction de la régularité de la donnée initiale.
- Nous illustrons nos résultats par des exemples .

Références

[1] Berenger, Jean-Pierre, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves* , J. Comput. Phys., 1994.

[2] Kreiss, Heinz-Otto and Lorenz, Jens, *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*, Academic Press Inc., 1989.

[3] Petit, Sabrina, *Stability of the discretization schemes for weakly well-posed problems in one dimension*, in preparation.

[4] Strikwerda, John C., *Finite difference schemes and partial differential equations*, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1989.

Sabrina PETIT – `spetit@math.univ-paris13.fr`
LAGA - Institut Galilée - 99, avenue JB Clément - 93430 Villeutaneuse