Analyse d'un modèle simple de transition de phase

Nicolas SEGUIN, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6

On se propose d'étudier un modèle simplifié décrivant l'évolution d'un fluide isotherme, pouvant se présenter sous sa forme gazeuse ou sous sa forme liquide. Ce modèle, exprimé ici en coordonnées lagrangiennes, s'écrit :

$$\partial_t \tau - \partial_x u = 0, \tag{1}$$

$$\partial_t u + \partial_x p = 0, \tag{2}$$

où τ est le volume spécifique, u la vitesse et p la pression du fluide, avec $\Omega := \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Le comportement thermodynamique du fluide est décrit par la loi d'état

$$p = \mathcal{P}(\tau) = \mathcal{P}(\tau) := \begin{cases} \mathcal{P}_l(\tau) & \text{si } 0 < \tau < \tau_1^*, \\ \mathcal{P}_l(\tau_1^*) \ (= \mathcal{P}_g(\tau_2^*)) & \text{si } \tau_1^* \leq \tau \leq \tau_2^*, \\ \mathcal{P}_g(\tau) & \text{si } \tau_2^* < \tau, \end{cases} \tag{3}$$

où $\mathcal{P}_g$ et $\mathcal{P}_l$ sont respectivement les lois thermodynamiques du fluide dans sa phase gazeuse et dans sa phase liquide. Ces deux lois vérifient les hypothèses classiques : elles sont convexes et décroissantes. Néanmoins, comme la loi de pression $\mathcal{P}$ est constante entre τ_1^* et τ_2^*, elle ne vérifie pas les hypothèses classiques sous lesquelles les résultats d'existence et d'unicité pour les solutions de (1-2) sont connus. En particulier, ce modèle n'est que conditionnellement hyperbolique : dès que (τ, u) appartient à $\Sigma := (\tau_1^*, \tau_2^*) \times \mathbb{R} \subset \Omega$, les valeurs propres de la matrice jacobienne du flux du système (1-2) coïncident et les vecteurs propres associés sont linéairement dépendants.
L'objet de cette présentation est l'étude des solutions du problème de Riemann (i.e. un problème de Cauchy pour lequel la donnée initiale est de la forme

$$(\tau, u)(x, 0) = \begin{cases} (\tau_L, u_L) & \text{si } x < 0, \\ (\tau_R, u_R) & \text{si } x > 0, \end{cases} \tag{4}$$

où (τ_L, u_L) et (τ_R, u_R) sont des états constants de Ω). Pour les systèmes conservatifs conditionnellement hyperboliques, l'existence et l'unicité a été démontré dans des cas différents de celui considéré ici. Par exemple, Isaacson et Temple ont étudié dans [3] le problème de Riemann quand $\dim(\Sigma) = \dim(\Omega) - 1$, alors qu'ici $\dim(\Sigma) = \dim(\Omega)$. Sous cette dernière condition et outre le présent travail [2], il existe seulement (à notre connaissance) l'article de Bachmann et Vovelle [1] dans lequel ils démontrent l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour un système de dimension 2, mais dont une des deux équations est stationnaire.
Ici, on construit les solutions du problème de Riemann (1-4), ce qui nous permet d'en montrer l'existence, l'unicité ainsi que la continuité L^1_{loc} (détaillé dans [2]), sous le critère d'admissibilité de Liu [4].

Références

[1] F. Bachmann, J. Vovelle, *Existence and Uniqueness of Entropy Solution of Scalar Conservation Laws with a Flux Function Involving Discontinuous Coefficients*, Comm. Partial Differential Equations, 31 (2006), pp. 371-395.

[2] E. Godlewski, N. Seguin, *The Riemann problem for a simple model of phase transition*, Comm. Math. Sci., 4 (2006), pp. 227-247.

[3] E. Isaacson, B. Temple, *Nonlinear resonance in systems of conservation laws*, SIAM J. Appl. Math., 52 (1992), pp. 1260-1278.

[4] T. P. Liu, *The entropy condition and the admissibility of shocks*, J. Math. Anal. Appl., 53 (1976), pp. 78-88.

Nicolas SEGUIN – `seguin@ann.jussieu.fr`
Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, UMR 7598 Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris.