Vers une paramétrisation auto-adaptative pour l'optimisation de forme aérodynamique

Régis DUVIGNEAU, INRIA Sophia-Antipolis, Projet Opale
Badr ABOU EL MAJD, INRIA Sophia-Antipolis, Projet Opale
Jean-Antoine DESIDERI, INRIA Sophia-Antipolis, Projet Opale

Mots-clés : Optimisation de forme, paramétrisation, adaptation, aérodynamique

1 Optimisation de forme paramétrique

L'optimisation de forme paramétrique consiste à choisir *a priori* une représentation géométrique des formes et, par suite, à chercher une forme optimale pour un problème donné, dans le sous-espace correspondant à la représentation géométrique choisie. Cette stratégie a plusieurs avantages, notamment :

- la réduction de la dimension du problème. Il est nécessaire de travailler avec un faible nombre de variables d'optimisation si on souhaite mettre en oeuvre une stratégie évolutionnaire par exemple.
- le contrôle de la régularité des formes. On doit s'assurer de la régularité des formes produites au cours de l'optimisation pour maintenir la viabilité des procédures de remaillage et de simulation.

En revanche, ce choix réduit l'ensemble des formes atteignables lors de la recherche d'une forme optimale. Pour chaque discipline, voire pour chaque problème, une paramétrisation *ad-hoc* doit être déterminée *a priori*, permettant de prendre en compte la complexité spécifique de la géométrie et les éventuelles contraintes. Par suite, la solution optimale obtenue dépend généralement du choix de la paramétrisation. L'objectif de cette étude est de réduire la sensibilité de la solution vis-à-vis de la paramétrisation choisie.

2 Paramétrisation auto-adaptative

On propose de modifier certaines caractéristiques de la paramétrisation, de manière à l'adapter au problème particulier qu'on souhaite résoudre, sur la base d'une première approximation de la forme optimale. Par exemple, on considère la paramétrisation de la forme d'un airfoil 2D par une courbe de Bézier :

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_n^i(t) P_i, \tag{1}$$

où $t \in [0,1]$ et $\{B_n^i\}_{i=0,\ldots,n}$ sont les polynômes de Bernstein de degré n. Les coordonnées des points de contrôle $P_i = \binom{x_i}{y_i}$ peuvent être considérées comme variables d'optimisation. Pour un corps allongé, comme un airfoil, seules les ordonnées $\{y_i\}_{i=0,\ldots,n}$ sont généralement prises en compte pour l'optimisation. Par suite, on propose de considérer les abscisses $\{x_i\}_{i=0,\ldots,n}$ comme *variables d'adaptation*, qui vont être modifiées pour adapter une paramétrisation initiale et naive au problème particulier traité.

Initialement, on peut choisir les abscisses $\{x_i\}_{i=0,\ldots,n}$ de manière équirépartie. Une fois qu'une approximation de la forme optimale a été obtenue par modification des ordonnées $\{y_i\}_{i=0,\ldots,n}$, on définit une nouvelle suite d'abscisses $\{x_i\}_{i=0,\ldots,n}$ mieux adaptée au problème, avant de poursuivre la procédure d'optimisation. Pour cela, on cherche à minimiser une fonctionnelle qui mesure l'imperfection de la paramétrisation, sous la contrainte que la forme actuelle est conservée au sens des moindres carrés. Etant donné une suite d'abscisses $\{x_i\}_{i=0,\ldots,n}$, il existe une unique suite d'ordonnées $\{y_i\}_{i=0,\ldots,n}$ qui permet d'approcher la forme actuelle au sens des moindres carrés. Durant la phase d'adaptation, on cherche donc les abscisses $\{x_i\}_{i=0,\ldots,n}$ pour lesquelles la suite des ordonnées correspondantes est la plus régulière, en minimisant la variation totale :

$$TV(\{y_i\}) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - y_{i-1}| \approx \int_0^1 |y'(t)| dt, \tag{2}$$

où $y(t)$ représente un interpolant des points de contrôle. Ce critère se justifie en observant que le processus d'optimisation agit comme un opérateur de dérégularisation vis-à-vis du polygone de contrôle.

Pour des problèmes plus complexes, comme l'optimisation de la forme d'une aile 3D, on utilise une paramétrisation de la déformation par la méthode des boites englobantes FFD[1] (*Free-Form Deformation*). Cette méthode consiste à définir une boite englobant la forme à modifier, ainsi qu'un système de coordonnées (ξ, η, ζ) lié à la boite, avec $(\xi, \eta, \zeta) \in [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Le déplacement Δq d'un point q intérieur à la boite est alors obtenu par application d'un produit tensoriel de Bézier :

$$\Delta q = \sum_{i=0}^{n_i} \sum_{j=0}^{n_j} \sum_{k=0}^{n_k} B_i^{n_i}(s_q) B_j^{n_j}(t_q) B_k^{n_k}(u_q) \Delta P_{ijk}, \tag{3}$$

où (s_q, t_q, u_q) représente une carte (*mapping*) des coordonnées (ξ_q, η_q, ζ_q) de q dans la boite englobante. Généralement, cette carte est définie comme l'identité. Les coefficients de pondération ΔP_{ijk} sont les variables d'optimisation du problème, tandis que la carte est considérée comme variable d'adaptation de la paramétrisation. La fonctionnelle minimisée durant l'adaptation s'inspire des développements concernant les courbes de Bézier :

$$\mathcal{J}_{AD} = \frac{1}{n_i n_j n_k} \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{k=1}^{n_k} \left\| \overline{\overline{\nabla}} \delta P_{ijk} \right\| \approx \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left\| \overline{\overline{\nabla}} \delta P(\xi, \eta, \zeta) \right\| d\xi \, d\eta \, d\zeta, \tag{4}$$

où $\delta P(\xi, \eta, \zeta)$ représente un interpolant du déplacement des points de contrôle.

3 Applications

3.1 Problème modèle : reconstruction géométrique d'un arc

La méthode est appliquée à un problème modèle d'optimisation de forme, issu du calcul des variations[2]. Il s'agit de minimiser la fonctionnelle :

$$\mathcal{J}_{OPT} = \frac{p^\alpha}{\mathcal{A}}, \tag{5}$$

où α est un réel positif. p et $\mathcal{A}$ sont la pseudo-longueur et la pseudo-aire définies par :

$$p = \int_0^1 \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \omega(t) dt \quad \mathcal{A} = \int_0^1 y(t) x'(t) \omega(t) dt. \tag{6}$$

$\omega(t)$ est une fonction positive et ajustable. On peut montrer que pour certains α et $\omega(t)$, la fonctionnelle est convexe et le problème devient un problème inverse dont la cible est une courbe connue (cercle, profil aérodynamique, etc).

La procédure d'optimisation de forme avec paramétrisation adaptative a été mise en oeuvre sur ce problème, avec une paramétrisation par courbes de Bézier de degré croissant. Les résultats obtenus[3] ont montré que l'adaptation de la paramétrisation permettait de réduire significativement la valeur de la fonctionnelle au point optimum, en s'approchant du minimum théorique (non atteignable par une paramétrisation par courbes de Bézier). Cette amélioration est d'autant plus importante que le degré de la courbe est faible.

3.2 Optimisation aérodynamique de la forme d'une aile

Finallement, la méthode a été appliquée à l'optimisation aérodynamique de la forme d'une aile d'un avion d'affaire. L'écoulement est modélisé par les équations d'Euler et la déformation de l'aile est paramétrée par l'approche FFD décrite ci-dessus. L'objectif de l'optimisation de forme est la réduction de la trainée aérodynamique sous contrainte de portance. Les équations d'Euler sont résolues par une méthode de type volumes-finis sur un maillage non-structuré. On emploie comme algorithme d'optimisation la méthode du simplexe de Torczon[4], qui ne nécessite pas la connaissance du gradient de la fonctionnelle.

Différents essais sont réalisés, mettant en jeu une paramétrisation grossière (8 paramètres), moyenne (20 paramètres) et fine (32 paramètres), avec et sans adaptation de la paramétrisation. Le tableau suivant montre la valeur de la fonctionnelle obtenue au point optimum trouvé (valeur initiale unité) :

grossier	0.50037
grossier + adaptation	0.48204
moyen	0.48077
moyen + adaptation	0.44840
fin	0.43238

On constate que l'optimum obtenu avec la paramétrisation grossière adaptée est presque aussi performant que celui obtenu avec la paramétrisation moyenne initiale. L'amélioration de la performance pour la paramétrisation moyenne due à l'adaptation est plus importante quantitativement que celle obtenue avec la paramétrisation grossière et la valeur de la fonctionnelle se rapproche de celle obtenue avec une paramétrisation fine.

4 Conclusion

On a développé une procédure d'auto-adaptation de la paramétrisation pour des problèmes d'optimisation de forme. Sa viabilité a été montrée pour un problème modèle 2D avec une paramétrisation par courbes de Bézier, puis pour l'optimisation aérodynamique de la forme d'une aile avec une paramétrisation par la méthode FFD.
La procédure de paramétrisation auto-adaptative a permis d'obtenir une amélioration significative de la valeur de la performance au point optimum, la paramétrisation s'adaptant au problème traité. Ainsi, on a réduit la dépendance de la solution vis-à-vis du choix de la paramétrisation initiale.

Références

[1] T.W. Sederberg and S.R. Parry, *Free-From Deformation of Solid Geometric Models*, Computer Graphics, vol 20, no 4, 1986.

[2] J.-A. Désidéri and J.-P. Zolésio, *Inverse Shape Optimization Problems and Application to Airfoils*, Control and Cybernatics, vol 34, no 1, 2005.

[3] B. Abou El Majd and J.-A. Désidéri and A. Janka, *Nested and self-adaptive Bezier parameterization for shape optimization*, International Conference on Control, Partial Differential Equations and Scientific Computing, Beijing, China, 13-16 Sept, 2004.

[4] J.E. Dennis and V. Torczon, *Direct Search Methods on Parallel Machines*, SIAM Journal of Optimization, vol 1, no 4, 1991.

Régis DUVIGNEAU – Regis.Duvigneau@ec-nantes.fr
INRIA Sophia-Antipolis, Projet Opale, 2004 route des lucioles, BP93, 06902 Sophia-Antipolis
Badr ABOU EL MAJD – Badr.Abou_El_Majd@sophia.inria.fr
INRIA Sophia-Antipolis, Projet Opale, 2004 route des lucioles, BP93, 06902 Sophia-Antipolis
Jean-Antoine DESIDERI – Jean-Antoine.Desideri@sophia.inria.fr
INRIA Sophia-Antipolis, Projet Opale, 2004 route des lucioles, BP93, 06902 Sophia-Antipolis