Un résultat d'existence pour un problème de shallow water à frontière libre en utilisant un schéma lagrangien

Mathieu PEYBERNES, Université de Corse

Mots-clés : domaine variable,schéma Lagrangien

Nous nous intéressons dans cette étude au comportement d'un fluide défini dans un domaine dépendant du temps Ω_t. Le modèle que nous proposons peut être utilisé dans divers domaines tels que les problèmes d'interaction fluide-structure [1] ou la simulation de modèles de propagation (comme la simulation de la dérive d'une nappe de polluant [2] ou l'analyse de la propagation des feux de forêt [5]). Pour caractériser le mouvement du fluide, on considère un modèle de shallow water à frontitère libre, l'évolution de la frontière étant définie par un opérateur frontière A (de tels opérateurs sont utilisés dans V.A. Solonikov [4] , J.T. Beale [3]). En notant u et h la vitesse et la hauteur du fluide, les équations caractérisant l'écoulement sont ainsi données par :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u - \mu \Delta u + \nabla h = 0 & \text{dans } \Omega_t, \\[2ex] \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0 & \text{dans } \Omega_t, \end{array} \right.$$

et on décrit le mouvement de la frontière γ_t par une condition sur la composante normale du tenseur des contraintes σ : $\sigma \cdot n = A(\partial u/\partial t)$ sur γ_t. L'opérateur A permet de conserver un domaine assez régulier au cours du temps et d'utiliser ainsi les propriétés classiques des espaces de Sobolev. Pour résoudre le système d'équations bidimensionnelles $(\mathcal{P})$ du fluide, nous proposons un schéma lagrangien. En effet, un schéma d'Euler n'est pas adapté pour la discrétisation d'un problème de ce type puisque nous travaillons sur un domaine non cylindrique. De plus, la description lagrangienne permet de suivre chaque particule dans son mouvement et de prendre ainsi en compte les variations de la frontière.
Notre approche consiste à utiliser un schéma linéaire où la dérivée totale est approximée par un schéma aux différences finis régularisé. Cette méthode permet de conserver certaines propriétés physiques. Par exemple on peut prouver qu'une particule ne peut pas sortir du domaine d'un pas de temps à l'autre. On montre que le schéma précédent a un sens, en particulier on montre que l'on retrouve le problème continu lorsque le pas de temps converge vers 0. Nous terminons cette étude en présentant la simulation d'une nappe de polluant évoluant à la surface de l'eau à partir de la méthode décrite précédemment.

Références

[1] F.Flori et P. Orenga, *Fluid-structure interaction: analysis of a 3-D compressible model*, Annales de l'Institut Henri Poincaré - Nonlinear Analysis, 2000.

[2] B. Di Martino and P. Orenga and M. Peybernes, *Simulation of a spilled oil slick with a shallow water model with free boundary*, M^3AS, soumis.

[3] J. T. Beale, *Large-time Regularity of Viscous Surface Waves*, Arch. Rational Mech, 1984.

[4] V.A. Solonikov, *Unsteady motion of a finite mass of fluid bounded by a free surface*, J. Soviet Math, 1988.

[5] M.I. Asensio and L. Ferragut and J. Simon, *Modelling of convective phenomena in forest fire*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A Mat., 2002.

Mathieu PEYBERNES – peybernes@univ-corse.fr
CNRS UMR 6134, Université de Corse Pascal Paoli, Campus Grossetti BP 52, 20250 Corté