Algorithmes d'optimisation et de contrôle d'interface libre

Antonin ORRIOLS, CERMICS (ENPC-INRIA)

Mots-clés : problèmes bifluides, contrôle optimal, magnétohydrodynamique

La production industrielle d'aluminium consiste à réduire l'alumine Al_20_3 par électrolyse, en injectant un courant électrique de plusieurs centaines de milliers d'ampères dans une solution (la cryolite) contenant l'oxyde dissous. Ainsi, l'aluminium pur apparaît à l'état liquide sous la cryolite, sa densité étant plus importante. Nous sommes donc en présence d'un système bifluide, soumis à des forces électromagnétiques du fait du courant électrique qui le traverse, et des champs magnétiques créés par les conducteurs amenant le courant dans la cuve. Par ailleurs, le fluide supérieur est moins bon conducteur que l'aluminium, ce qui occasionne d'importantes pertes d'énergie par effet Joule. L'enjeu est alors de réduire au maximum la hauteur de cryolite sous l'électrode supérieure, tout en veillant à ne pas déstabiliser le système.

On simule numériquement le système considéré sur un modèle magnétohydrodynamique couplant les équations de Navier-Stokes et de Maxwell. Soit un parallélépipède contenant deux fluides qui se distinguent par leurs densités (ρ_1, ρ_2), et leurs nombres de Reynolds (Re_1, Re_2) et de Reynolds magnétiques (Rm_1, Rm_2). En notant le nombre de Froude Fr et la densité adimensionnée $\zeta_i = \rho_i/\rho_1$, nous calculons la vitesse u, la pression p et le champ magnétique B en résolvant dans chacun des fluides :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \zeta\, \partial_t u + \zeta (u\cdot\nabla)\, u + \nabla p - \operatorname{div}\left(\frac{\zeta}{Re}\nabla u\right) & = & -\zeta\, \frac{e_z}{Fr} + \operatorname{rot} B \times B \\ \partial_t B + \operatorname{rot}\left(\frac{1}{Rm}\operatorname{rot} B\right) & = & \operatorname{rot}(u \times B) \\ \operatorname{div} u \;=\; \operatorname{div} B & = & 0 \end{array} \right.$$

par éléments finis et en formulation ALE pour tenir compte des mouvements de l'interface entre les deux fluides (voir [1]). L'objectif est de contrôler la position ou les mouvements de l'interface par une méthode de type gradient, en utilisant diverses commandes. On commence pour cela par considérer deux problèmes simplifiés moins consommateurs de temps de calcul :

1) Modèle de type shallow-water linéarisé : c'est un couplage entre la perturbation η sur la hauteur d'interface et celle sur le potentiel électrique ϕ, dans lequel intervient le champ magnétique vertical B_z :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t^2\, \eta - c^2\, (\Delta_H\, \eta + \partial_y\phi\, \partial_x B_z - \partial_x\phi\, \partial_y B_z) & = & 0 \\ -\Delta_H\, \phi - S\, \eta & = & 0 \end{array} \right.$$

plus les conditions aux bords. Deux commandes sont testées : la hauteur de cryolite (intervenant dans les coefficients de couplage S et c^2), et le champ magnétique vertical B_z.

2) Problème de Stokes bifluide : la grandeur à contrôler (hauteur d'interface) n'apparaît plus cette fois en tant qu'inconnue explicite, mais en tant que paramétrisation de l'interface ; ainsi la vitesse u, la pression p et la hauteur d'interface h sont solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\operatorname{div}\left[\eta\, (\nabla u + \nabla u^T)\right] + \nabla p & = & \rho\, g + f \\ -\operatorname{div} u & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{à l'intérieur du domaine,}$$

$$\text{avec} \quad u\cdot n = 0 \quad \text{sur l'interface} \quad \Sigma = \{x, h(x)\}\,, \quad \text{et} \quad \int h(x)\, dx = \text{constante}\,,$$

où $\rho(x,z)$ et $\eta(x,z)$ prennent des valeurs différentes suivant que $z < h(x)$ où $z > h(x)$. On cherche à faire coïncider $h(x)$ avec une paramétrisation de l'interface prescrite $h_0(x)$, au moyen de la commande distribuée f, représentant la force électromagnétique. Les travaux effectués reposent notamment sur la dérivation de ces équations par rapport au domaine mobile.

Références

[1] J.-F. Gerbeau, C. Le Bris et T. Lelièvre, *Mathematical methods for the Magnetohydrodynamics of liquid metals*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, à paraître.

Antonin ORRIOLS – `orriols@cermics.enpc.fr`
CERMICS, ENPC, 6 et 8, avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-La-Vallée