Analyse d'un modèle ϵ–arbitrage pour les marchés incomplets

Marie-Noëlle LE ROUX, Université Bordeaux1

Mots-clés : finance, mathematical model, nonlinear parabolic problem

Etant donnée une option européenne (put ou call) avec une fonction de payoff arbitraire, on veut résoudre le problème de réplication optimale: Trouver une stratégie de portefeuille auto financée qui approche le mieux possible la fonction de payoff à maturité.
Sous certaines hypothèses (marchés complets), il est possible de trouver un portefeuille qui réplique exactement le payoff; c'est le modèle de Black and Scholes (1973).
Mais les conditions garantissant ce résultat sont trop restrictives sur la structure des marchés et la dynamique des prix; il existe des situations dans lesquelles une réplication exacte est impossible, (par exemple si la volatilité est stochastique); c'est le cas des marchés incomplets. Dans [1], Bertsimas, Kogan et Lo s'intéressent au problème suivant: lorsque la réplication exacte est impossible, comment peut-on approcher au mieux la fonction de payoff à maturité.

On considère un portefeuille constitué d'actions et d'actifs non risqués. La valeur de ce portefeuille est:
$V(\tau) = \theta(\tau)P(\tau) + B(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq T$
où θ est le nombre d'actions détenues, P le prix de l'action et B la valeur des actifs non risqués. Le portefeuille est auto-financé, c'est-à-dire $dV = \theta dP$. On cherche une stratégie de portefeuille $\theta(\tau)$ telle que la valeur terminale $V(T)$ soit aussi proche que possible de la fonction de payoff à maturité $F(P, \sigma)$ où σ est la volatilité. Le problème est donc:

$$\min_{\theta} E((V(T) - F(P(T), \sigma(T))^2/(V_0, P(0), \sigma(0)) = \epsilon(V_0)$$

où V_0 est le portefeuille à l'instant initial et $\epsilon(V_0)$ l'erreur de réplication.
Cette erreur peut ensuite être minimisée par rapport à V_0 et
$\epsilon^* = \min_{V_0} \epsilon(V_0)$ est l'erreur de réplication optimale.

Dans le cas du modèle de Black and Scholes, il existe des stratégies de réplication optimale pour lesquelles $\epsilon^* = 0$. Ce n'est plus le cas dans le cas de marchés incomplets, par exemple lorsque les variables P et σ ne sont pas parfaitement corrélées.

On suppose que le prix de l'action et la volatilité vérifient les équations différentielles stochastiques:
$dP = \mu P dt + \sigma P dW_P$
$d\sigma = g(\sigma)dt + k\sigma dW_\sigma$
W_P et W_σ sont des mouvements browniens de covariance $dW_P dW_\sigma = \rho dt$; μ est la tendance.

Si on note $J(\tau, V, P, \sigma)$ la fonction définie par:
$J(\tau, V, P, \sigma) = \min_{\theta(s),\ s \geq \tau} E\left((V(T) - F(P(T), \sigma(T))^2/(V(\tau), P(\tau), \sigma(\tau)\right)$
Bertsimas, Kogan et Lo ont montré les résultats suivants:

La fonction J est quadratique en V: $J = a(V - b)^2 + c$ et les coefficients a, b, c sont solutions du système d'équations aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = -\frac{k^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial \sigma^2} - g_1(\sigma)\frac{\partial a}{\partial \sigma} + \rho^2 k^2 \frac{\sigma^2}{a}\left(\frac{\partial a}{\partial \sigma}\right)^2 + a f^2(\sigma) \tag{1}$$

$$\frac{\partial b}{\partial \tau} = -\frac{k^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial \sigma^2} - \frac{\sigma^2 P^2}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial P^2} - \rho k \sigma^2 P \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma \partial P} - g_2(\sigma)\frac{\partial b}{\partial \sigma} - (1-\rho^2)k^2\frac{\sigma^2}{a}\frac{\partial a}{\partial \sigma}\frac{\partial b}{\partial \sigma} \tag{2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -\frac{k^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} - \frac{\sigma^2 P^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial P^2} - \rho k \sigma^2 P \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial P} - g(\sigma)\frac{\partial c}{\partial \sigma} - \sigma f(\sigma) P \frac{\partial c}{\partial P}$$

$$-(1-\rho^2)k^2\sigma^2 a\left(\frac{\partial b}{\partial \sigma}\right)^2 \qquad (3)$$

La fonction f est positive,décroissante,bornée;
$g(\sigma) = -\delta\sigma(\sigma - \sigma_1)$ ($\delta > 0$ et $\sigma_1 \in]0,1[$); $g_1(\sigma) = g(\sigma) - 2\rho k\sigma f(\sigma)$; $g_2(\sigma) = g(\sigma) - \rho k\sigma f(\sigma)$.

Les conditions finales à maturité sont données: $a(T,\sigma) = 1$, $b(T,P,\sigma) = F(P,\sigma)$, $c(T,P,\sigma) = 0$.

Le portefeuille initial qui minimise l'erreur de réplication est $V_0^* = b(0)$, l'erreur de réplication minimale est $\epsilon^* = \sqrt{c(0)}$ et le contrôle optimal est donné par: $\theta^*(0) = \frac{\partial b}{\partial P}(0) + \frac{\rho k}{P}\frac{\partial b}{\partial \sigma}(0)$.

On propose une méthode de résolution numérique des équations (1), (2), (3), ce qui permet ensuite d'obtenir le contrôle optimal.
Pour résoudre l'équation (1), on change le sens du temps et on fait le changement d'inconnue: $u_1 = \ln(a)$.
La fonction u_1 est solution de :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{k^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma^2} - g_1(\sigma)\frac{\partial u_1}{\partial \sigma} + \lambda\sigma^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial \sigma}\right)^2 + f^2(\sigma) = 0, \quad \sigma > 0 \qquad (4)$$

où $\lambda = k^2(\rho^2 - \frac{1}{2})$. Ce coefficient peut donc être positif ou négatif.
A l'instant initial, $u_1(0) = 0$. La fonction $u_1(.,t)$ est bornée.

La solution approchée est obtenue en utilisant une méthode d'Euler rétrograde pour la discrétisation en temps; une méthode d'éléments finis P_1 adaptée au problème est utilisée pour la discrétisation du terme d'ordre 2. Le terme linéaire d'ordre un est discrétisé à l'aide d'un schéma décentré implicite pour éviter une condition de stabilité trop restrictive due au comportement de g à l'infini. Le terme non linéaire d'ordre un est traité de manière explicite par un schéma décentré; les noeuds du maillage étant distribués de telle sorte que la condition de stabilité ne soit pas trop contraignante. Les estimations obtenues sur la solution et sa dérivée en σ permettent de démontrer la convergence de cette solution vers une solution faible du problème (4) et donc l'existence de cette solution. L'unicité de cette solution est également obtenue.

Pour résoudre les équations (2) et (3), on utilise une méthode variationnelle après avoir fait un changement d'inconnues: $u_2 = e^{-\alpha\sigma}b$, $u_3 = e^{-\alpha\sigma}c$,$(\alpha > 0)$. Lorsque α est convenablement choisi, les problèmes variationnels obtenus admettent une solution unique dans des espaces de Sobolev avec poids. Les équations (2) et (3) sont ensuite discrétisées par une méthode d'Euler rétrograde en temps et une méthode d'éléments finis en espace, validées par des tests numériques.

Références

[1] D.Bertsimas, L.Kogan and A.W.Lo *Hedging Derivative Securities and incomplete markets: an ϵ–arbitrage approach*, Operations Research, Vol. 49, N3,May-June 2001, pp372-397.

Marie-Noëlle Le Roux – `Marie-Noelle.Leroux@math.u-bordeaux1.fr`
LaBAG,UMR5467, Université Bordeaux1, 351, Cours de la Libération, 33405, Talence Cedex