Schémas volumes finis pour les équations elliptiques linéaires et non-linéaires à coefficients discontinus

Franck BOYER, LATP, Université de Provence
Florence HUBERT, LATP, Université de Provence

Mots-clés : Schémas volumes finis, Opérateurs de Leray-Lions, Consistance des flux

Les schémas volumes finis de type DDFV (Discrete Duality Finite Volume) ont été initialement introduits pour discrétiser l'équation de Poisson sur des maillages 2D les plus généraux possibles, s'affranchissant en particulier de l'hypothèse de “conformité” usuelle dans ce cadre [2].
Ils consistent à approcher l'équation simultanément sur un maillage primal et sur son maillage dual, le gradient de la solution étant approché de façon constante par morceaux sur des cellules dites *diamants*. Les schémas ainsi obtenus possèdent des propriétés similaires à celles du problème continu ce qui permet en particulier leur analyse [2]. Cette propriété de “fidélité” au problème continu nous a conduits à considérer dans [1] l'utilisation de tels schémas, toujours sur des maillages 2D généraux, pour résoudre des problèmes elliptiques non-linéaires de type Leray-Lions (dont le problème modèle est le p-laplacien)

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\varphi(z, \nabla u(z))) = f(z), \quad \text{dans } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

le flux φ étant supposé régulier, monotone et coercif. Nous avons montré dans [1] que la méthode DDFV peut en effet s'adapter à de tels problèmes. Plus précisément, les schémas obtenus sont monotones, bien-posés et convergent pour tout terme source. Dans cette référence nous avons également obtenu des estimations d'erreurs sous des hypothèses de régularité du flux φ (notamment de type Hölder en z) et de la solution exacte u.
Dans cet exposé, nous proposons l'extension des résultats précédents au cas où le flux non-linéaire φ est régulier par morceaux (par rapport à z). On supposera, pour fixer les idées, que Ω se divise en deux sous-domaines disjoints Ω_1 et Ω_2 tels que φ est discontinu à l'interface $\Gamma = \Omega_1|\Omega_2$. Dans ce cas, le schéma général proposé dans [1] converge mais l'estimation d'erreur n'est pas valable et, de fait, l'ordre de convergence numérique constaté est moins bon que dans le cas régulier.
Ce mauvais comportement est bien entendu lié à une perte de consistance des flux sur l'interface Γ. Ce phénomène est bien connu déjà dans le cas linéaire isotrope où $\varphi_{|\Omega_i} = k_i\mathrm{Id}$, $k_1 \neq k_2$ pour des schémas VF classiques et l'on sait que le *remède* consiste à approcher les flux à l'interface *via* la moyenne harmonique pondérée des k_i et non pas la moyenne arithmétique. Dans le cas linéaire anisotrope, Hermeline [3] a donné la bonne façon de généraliser cette approche pour retrouver la consistance des flux.
En s'inspirant de ce cadre, nous montrons comment adapter la formulation DDFV au cadre non-linéaire discontinu. Nous établissons que le schéma proposé admet une unique solution et donnons une estimation d'erreur (qui inclut donc l'analyse du schéma présenté dans [3]). De plus, nous proposons une méthode itérative issue d'une formulation de type point-selle dont nous montrons la convergence vers l'unique solution du schéma.
Nous donnons des résultats numériques illustrant l'étude ci-dessus, par exemple sur des problèmes de transmission où $\varphi_{|\Omega_1}$ est linéaire et $\varphi_{|\Omega_2}$ est non-linéaire.

Références

[1] B. Andreianov, F. Boyer et F. Hubert, *Discrete duality finite volume schemes for Leary-Lions elliptic problems on general 2D meshes*, à paraitre dans Numerical Methods for PDEs, 2006.

[2] K. Domelevo et P. Omnes, *A finite volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids*, M^{2}AN, **39**, n° 6, pp. 1203–1249, 2005.

[3] F. Hermeline, *Approximation of diffusion operators with discontinuous tensor coefficients on distorted meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **192**, pp. 1939–1959, 2003.

Franck BOYER – `fboyer@cmi.univ-mrs.fr`
LATP - CMI, UMR CNRS 6632, 39 rue F. Joliot Curie, F-13453 Marseille cedex 13
Florence HUBERT – `fhubert@cmi.univ-mrs.fr`
LATP - CMI, UMR CNRS 6632, 39 rue F. Joliot Curie, F-13453 Marseille cedex 13