Sur un modèle issu de la diffusion des populations

Sorin MARDARE, Université de Zürich

Il y a quelques années, M. Chipot [1] a étudié un modèle pour la diffusion d'une population dans lequel la vitesse de diffusion de la population en un point x d'un domaine Ω est influencée par la population au point $\varphi(x)$, où $\varphi : \Omega \to \Omega$ est une application donnée. Dans ce cas, la densité $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de la population satisfait l'équation

$$-\mathrm{div}(A(x, u \circ \varphi(x))\nabla u(x)) + u(x) = f(x) \text{ dans } \Omega,$$

où $A : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{M}^{n\times n}$ est un champ de matrices satisfaisant certaines hypothèses.
On étudie ici un autre modèle stationnaire inspiré par la diffusion d'une population dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$. D'après ce modèle, la densité $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de la population résout l'équation

$$-\Delta u + u \circ \varphi = f, \tag{1}$$

où $\varphi : \Omega \to \Omega$ est une application donnée et f est un terme source dû par exemple à la naissance. Le premier terme de l'équation modélise la diffusion de la population, tandis que le second terme modélise la mortalité en x, supposée dépendante de la densité de la population au point $\varphi(x)$. Sur la frontière de Ω on suppose que l'environnement est tellement hostile que la densité de la population doit s'annuler.
Les questions auxquelles on a apporté des réponses concernent l'existence, la non-existence, et l'unicité d'une solution faible de l'équation (1), ainsi que l'analyse spectrale et asymptotique de cette équation. Plus précisément, on établit les résultats suivants:
- Conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution, basées sur l'alternative de Fredholm,
- Résultats d'existence et unicité dans le cas où le deuxième terme de l'équation (1) est "negligeable" par rapport à la diffusion (l'équation (1) est alors "proche" de l'équation $-\Delta u = f$),
- Résultats d'existence et unicité dans le cas où φ est proche de l'identité (l'équation (1) est alors "proche" de l'équation $-\Delta u + u = f$),
- Exemples de non-existence et d'existence multiple des solutions,
- Analyse spectrale et asymptotique de l'opérateur linéaire associé à l'équation (1).

La particularité de ce travail consiste dans le fait que, bien que l'équation (1) soit linéaire, elle présente le terme peu usuel $u \circ \varphi$ qui rend difficile l'application de la théorie classique des équations aux dérivées partielles linéaires. Comme attendu, les résultats établis dans cet article dépendent d'une manière essentielle des propriétés (notamment l'injectivité et la régularité) de l'application φ. Moins attendu est le rôle joué par la mesure et la forme du domaine Ω dans l'établissement de certains résultats d'existence et unicité pour l'équation (1).
Il est à remarquer que tous les résultats de cet article peuvent être facilement étendus à la situation plus générale où la densité u de la population satisfait l'équation

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) + u \circ \varphi = f \tag{2}$$

où $A : \Omega \to \mathbb{M}^{n\times n}$ est un champ mesurable de matrices satisfaisant (pour certains $\alpha, \beta > 0$)

$$\alpha|X|^2 \leq X^t A(x) X \leq \beta |X|^2 \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ et tout } X \in \mathbb{R}^n.$$

Références

[1] M. Chipot, *The Diffusion of a Population Partly Driven by its Preferences*, Arch. Rational Mech. Anal. 155, 237-259, 2000.

Sorin MARDARE – `sorin.mardare@math.unizh.ch`
Institut für Mathematik, Université de Zürich, Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zürich